UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

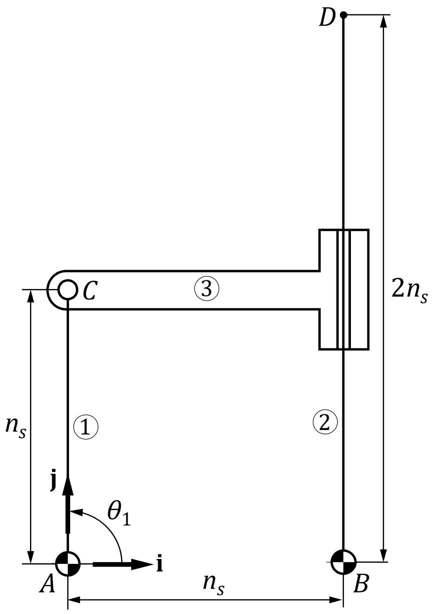
7 giugno 2022

ESAME DI MECCANICA I

— Primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria* (cod. 842II), CdS in Ing. Biomedica —

I valori numerici nei tre esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare:

n = numero di matricola; n_s = somma delle cifre del numero di matricola



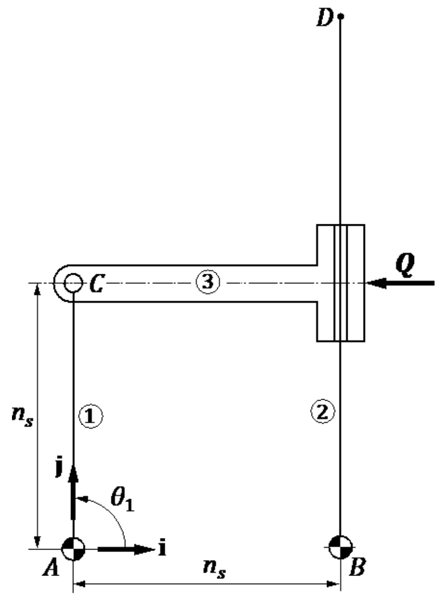
Esercizio 1

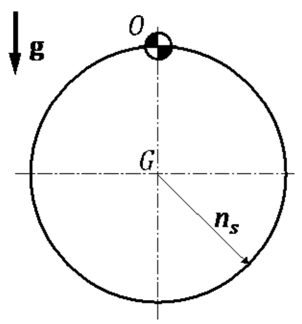
1) Ottenere numericamente le componenti della velocità del punto D dell'asta 2 nel sistema di riferimento $(A; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ indicato in figura, sapendo che la velocità angolare $\dot{\theta}_1$ dell'asta 1 è pari a 1 rad/s in questa configurazione.
2) Ottenere le coordinate di C_{v3} (assoluto) e di C_{v12} (relativo) nel sistema di riferimento $(A; \mathbf{i}, \mathbf{j})$.
3) Ottenere un'equazione di chiusura per le accelerazioni in forma letterale (non risolvere numericamente).

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. La forza orizzontale $\boldsymbol{Q}$, applicata al corpo 3 e avente retta di applicazione passante per C, è rivolta verso sinistra ed il suo modulo è pari a $n/1000$ (approssimare all'intero più vicino). Per ottenere condizioni di equilibrio statico, si decide di applicare al corpo 1 una forza $\boldsymbol{F}$ (incognita) avente retta di applicazione orizzontale e passante per il punto medio dell'asta 1.

1) Determinare tutte le forze/coppie reattive.
2) Riportare i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.





Esercizio 3

Il disco omogeneo in figura compie piccole oscillazioni attorno alla cerniera fissa O in un piano verticale. Lo smorzamento del sistema è trascurabile.

1) Ottenere il valore numerico della pulsazione naturale.
2) All'istante iniziale $(t = 0)$ si assegna al disco uno spostamento angolare $\theta(0) = 0.1$ rad e una velocità angolare $\dot{\theta}(0) = 0$. Ottenere la legge del moto $\theta(t)$ e tracciarne qualitativamente il grafico.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

SOLUZIONE

Esercizio 1

1) Si risolve intanto il problema delle velocità del meccanismo, chiudendo (ad esempio) sul punto C:

$$\boldsymbol{v}_{C\in 1} = \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AC$$

Tale espressione può essere uguagliata alla seguente, ottenuta mettendosi solidali all'asta 2:

$$\boldsymbol{v}_{C\in 3} = \boldsymbol{v}_{C\in 3}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{v}_{C\in 3}^{(\mathrm{tr})} = \dot{s}\mathbf{j} + \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BC$$

Equazione di chiusura:

$$\dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AC = \dot{s}\mathbf{j} + \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BC$$

Nel sistema di riferimento assegnato, $AC = (0, n_s)$ e $BC = (-n_s, n_s)$. Risolvendo con $\dot{\theta}_1 = 1$ rad/s:

$$\dot{\theta}_2 = 1\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}; \qquad \dot{s} = n_s\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

La velocità del punto D è dunque (con $BD = (0, 2n_s)$):

$$\boldsymbol{v}_{D\in 2} = \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BD = (-2n_s, 0)\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

2) Per il $C_{\mathrm{v}3}$, le due rette di Chasles sono, rispettivamente, la retta prolungamento di AC ed una retta orizzontale passante per B (e quindi per A), dunque:

$$C_{\mathrm{v}3} = (0{,}0)$$

Per il $C_{\mathrm{v}12}$, le due rette di Chasles sono due rette orizzontali passanti, rispettivamente, per C e per B (e quindi per A), dunque il $C_{\mathrm{v}12}$ non esiste.

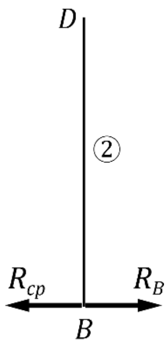
3) Come per le velocità, chiudiamo sul punto notevole C:

$$\ddot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AC - \dot{\theta}_1^2 AC = \ddot{s}\mathbf{j} + \ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BC - \dot{\theta}_2^2 BC + 2\dot{\theta}_2 \mathbf{k} \times \dot{s}\mathbf{j}$$

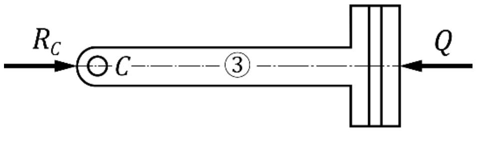
Esercizio 2

1) L'asta 2 è scarica:

$$R_B = R_{cp}$$



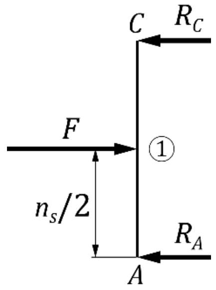
Passiamo al corpo 3, su cui agisce la forza Q nota:



$$R_C = Q\ \ (= n/1000)$$

<u>N.B.</u> Non si è riportata la reazione R_{cp} esercitata dal corpo 2 sul corpo 3 perché il rispetto della seconda cardinale richiede $R_{cp} = 0$. Dunque, anche $R_B = 0$.

Passiamo infine al corpo 1. Scrivendo la seconda cardinale rispetto (ad esempio) al polo A e la prima cardinale in orizzontale si ottengono subito:



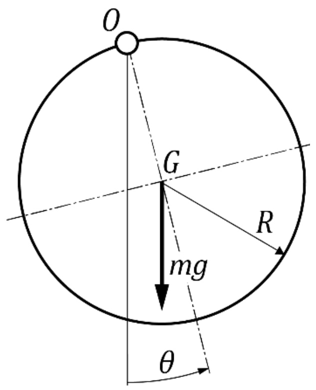
$$F = 2Q \ \ (= n/500)$$

$$R_A = Q \ \ (= n/1000)$$

2) (I DCL finali risolti sono banali.)

Esercizio 3

1) Si consideri il DCL del disco qui sotto (in cui $R = n_s$), posto in una configurazione variata di un angolo θ (coordinata lagrangiana) rispetto alla configurazione di equilibrio statico. Per ottenere l'equazione del moto senza far comparire la reazione $\boldsymbol{R}_O$, conviene scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al polo fisso O:



$$-mgR\sin\theta = J_o\ddot{\theta}$$

e considerando piccole oscillazioni ($\sin\theta \approx \theta$):

$$-mgR\theta = J_o\ddot{\theta}$$

Per il teorema degli assi paralleli: $J_o = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

L'equazione differenziale del moto è dunque:

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + mgR\theta = 0$$

e dividendo tutto per J_o:

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3R}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3R}} = \sqrt{\frac{2g}{3n_s}}$$

2) Trovandoci in condizioni ideali di assenza di smorzamento ($\zeta = 0$), la soluzione dell'equazione differenziale del moto assume la forma:

$$\theta(t) = A\sin(\omega_n t + \varphi)$$

dove le due costanti A (ampiezza) e φ (fase) si determinano usando le condizioni iniziali date, $\theta(0) = \theta_0 = 0.1$ rad e $\dot{\theta}(0) = 0$, cioè risolvendo il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite (A, φ):

$$\begin{cases} \theta(0) = A\sin\varphi = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = A\omega_n\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \theta_0 = 0.1 \text{ rad}$$

La legge del moto è quindi:

$$\theta(t) = 0.1 \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{3n_s}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = 0.1 \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{3n_s}}\,t\right)$$

avente andamento cosinusoidale del tipo: