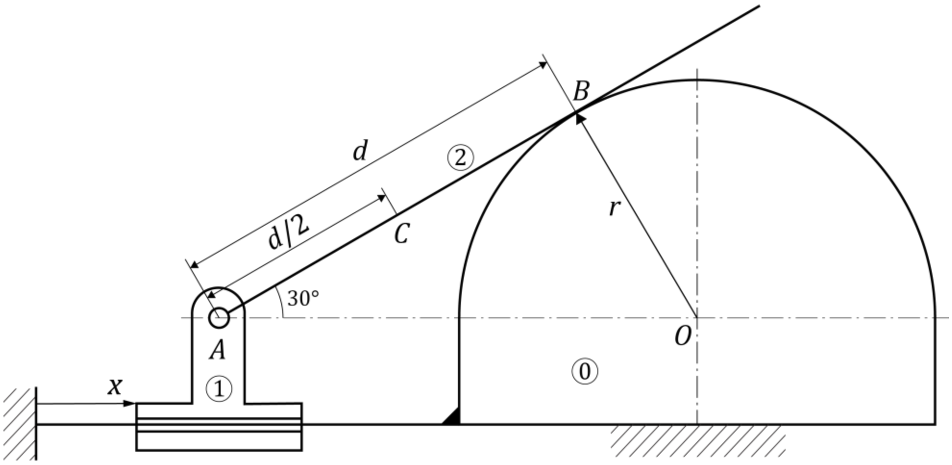
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

15 febbraio 2022

ESAME DI MECCANICA I – VERSIONE A

— Primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria* (cod. 842II), CdS in Ing. Biomedica —

Esercizio 1



Nel meccanismo in figura, costituito da due soli corpi mobili (corpi 1 e 2), sono presenti condizioni di rotolamento con strisciamento (RCS) tra il corpo 0 (telaio) ed il corpo 2 in corrispondenza del punto di contatto B. Nella configurazione rappresentata sono note le quantità geometriche riportate (d e l'angolo di 30° indicato, quindi anche il raggio r) e x è la coordinata lagrangiana.

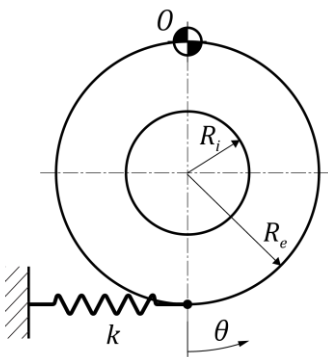
1) Determinare i centri delle velocità assoluti e relativi dei corpi mobili.
2) Ottenere un'equazione di chiusura delle velocità e determinare analiticamente le velocità incognite in funzione dei dati del problema.
3) A conferma della correttezza dei segni delle velocità ricavate al punto 2, ottenere la soluzione grafica (triangolo delle velocità) assumendo $\dot{x} > 0$.
4) Ottenere un'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1 sotto l'azione di una forza verticale $\boldsymbol{P}$, applicata sul corpo 2 in corrispondenza del punto C, rivolta verso il basso e completamente nota. Si vuole affidare l'equilibrio statico del sistema alla presenza di attrito in B (appoggio con contatto puntiforme in presenza di attrito).

1) Determinare tutte le forze/coppie reattive e riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.
2) Nel caso in cui l'equilibrio sia effettivamente affidabile all'attrito, determinare il minimo valore del coefficiente di attrito statico necessario a tale scopo.

Esercizio 3



Del disco forato omogeneo rappresentato a lato, vincolato a compiere *piccole oscillazioni* (in un piano orizzontale) attorno alla cerniera fissa O, sono noti i raggi interno R_i ed esterno R_e (v. figura) e la massa m. È nota inoltre la costante elastica k della molla lineare (a riposo per $\theta = 0$), mentre lo smorzamento del sistema è nullo.

1) Ottenere l'equazione del moto.
2) Ottenere la pulsazione naturale in funzione dei dati del problema.
3) Ottenere la legge del moto $\theta(t)$ assumendo le seguenti condizioni iniziali:

$$\theta(0) = \theta_0 \text{ (angolo noto)}; \qquad \dot{\theta}(0) = 0$$

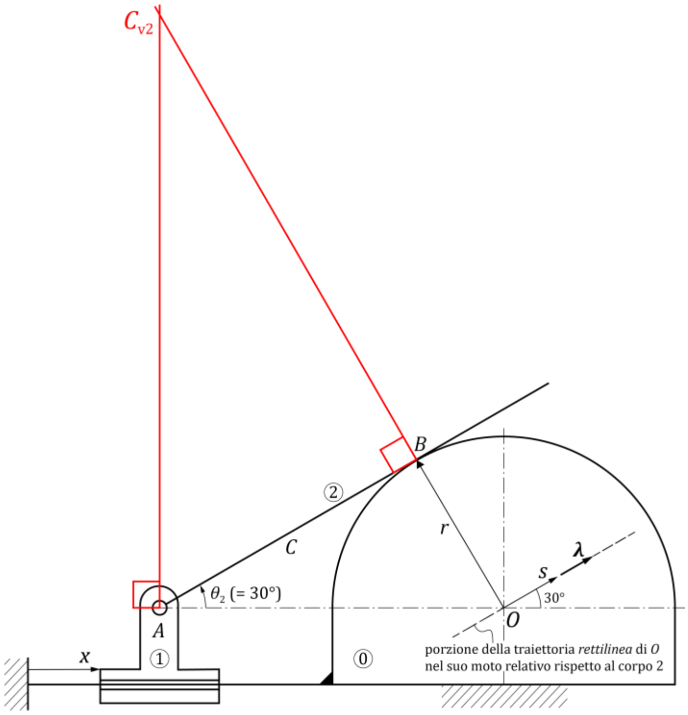
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

SOLUZIONE VERSIONE A

N.B. Le soluzioni delle altre versioni (B, C, D) sono perfettamente analoghe.

Esercizio 1

1) C_{v1} non esiste (moto traslatorio); $C_{v12} = A$; C_{v2} in figura:



2) Per scrivere un'equazione di chiusura per le velocità, e soprattutto per le accelerazioni al successivo punto 4, conviene scegliere il punto O del telaio 0, considerando banalmente che $\boldsymbol{v}_{O\in 0} = \mathbf{0}$.
Mettendosi solidali al corpo 2, è facile scrivere un'altra espressione della velocità di O:

$$\boldsymbol{v}_{O\in 0} = \boldsymbol{v}_{O\in 0}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{v}_{O\in 0}^{(\mathrm{tr})} = \dot{s}\boldsymbol{\lambda} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{\theta}_2\mathbf{k} \times AO,$$

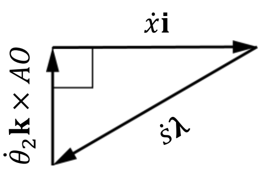
dove la coordinata relativa s ed il versore $\boldsymbol{\lambda}$ sono rappresentati nel disegno sopra (al punto 1), mentre $\mathbf{i}$ e $\mathbf{k}$ sono i soliti versori. L'equazione di chiusura è dunque:

$$\dot{s}\boldsymbol{\lambda} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{\theta}_2\mathbf{k} \times AO = \mathbf{0}$$

Risolvendo con $\boldsymbol{\lambda} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $AO = (d/\cos 30°, 0) = (2d/\sqrt{3}, 0)$ si ottiene[1]:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{x}}{2d}; \quad \dot{s} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\dot{x}$$

3) Triangolo delle velocità (con $\dot{x} > 0$):



$$\dot{\theta}_2 > 0 \ \text{ e } \ \dot{s} < 0,$$

a conferma di quanto ottenuto al punto 2.

4) Come per le velocità, chiudiamo sul punto O del telaio. Ovviamente, $\boldsymbol{a}_{O\in 0} = \mathbf{0}$. Mettendosi solidali a 2:

$$\boldsymbol{a}_{O\in 0} = \boldsymbol{a}_{O\in 0}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{a}_{O\in 0}^{(\mathrm{tr})} + \boldsymbol{a}_{O\in 0}^{(\mathrm{Co})} = \ddot{s}\boldsymbol{\lambda} + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{\theta}_2\mathbf{k} \times AO - \dot{\theta}_2^2 AO + 2\dot{\theta}_2\mathbf{k} \times \dot{s}\boldsymbol{\lambda}$$

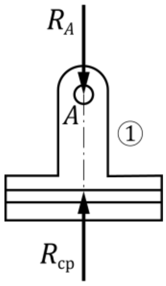
[1] si osservi che r è ricavabile in funzione di d: $d\tan 30° = r \ \rightarrow \ r = d/\sqrt{3}$

da cui l'equazione di chiusura per le accelerazioni:

$$\ddot{s}\boldsymbol{\lambda} + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{\theta}_2\mathbf{k} \times AO - \dot{\theta}_2^2 AO + 2\dot{\theta}_2\mathbf{k} \times \dot{s}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

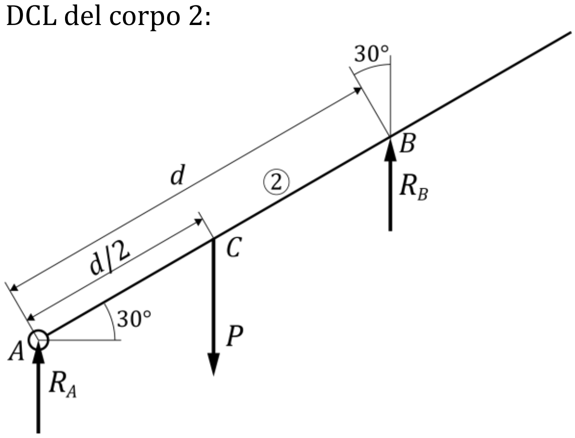
Esercizio 2

1) Il corpo 1 è scarico:



$$R_A = R_{cp}$$

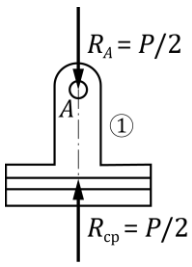
DCL del corpo 2:

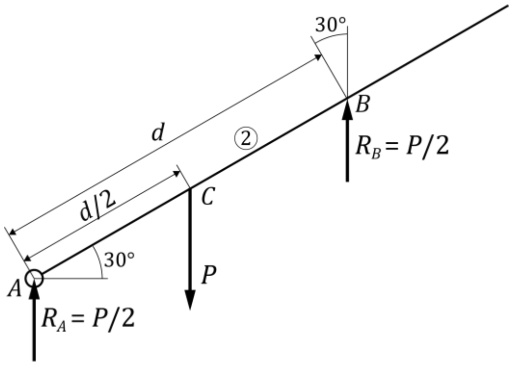


$$R_A + R_B = P$$

$$A)\quad R_B d\frac{\sqrt{3}}{2} = Pd\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{P}{2} = R_A = R_{cp}$$

DCL risolti:





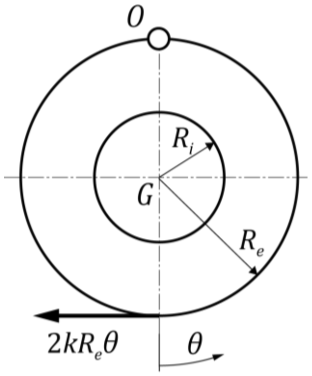
2) L'equilibrio statico è affidabile all'attrito, dato che la reazione $R_B = \frac{P}{2}$ ha una componente normale che è di supporto per il corpo 2. Il minimo valore del coefficiente di attrito statico è (v. anche DCL risolto di 2):

$$f_{\min} = \tan\varphi_{\min} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.577$$

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

Esercizio 3

1) Considerando il DCL del disco qui sotto (ottenuto nell'ipotesi di piccole oscillazioni), conviene scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al polo fisso O per non far comparire la reazione $\boldsymbol{R}_O$:



$$-4kR_e^2\theta = J_o\ddot{\theta}$$

In questa equazione differenziale compare il momento d'inerzia J_o (rispetto ad un asse ortogonale al piano del foglio e passante per O), che deve essere determinato in funzione dei dati del problema.

Il momento d'inerzia del disco forato rispetto ad un asse *baricentrico* (quindi passante per il centro G del disco) ortogonale al piano del foglio è determinabile, ad esempio, mediante:

$$J_G = \rho\int_{R_i}^{R_e} r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{2\rho\pi}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right) = \rho\pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)\frac{R_e^2 + R_i^2}{2} = m\frac{R_e^2 + R_i^2}{2}$$

dove ρ è la densità superficiale Adesso per ottenere J_o basta usare il teorema degli assi paralleli:

$$J_O = J_G + mR_e^2 = m\frac{R_e^2 + R_i^2}{2} + mR_e^2 = \frac{m}{2}\left(3R_e^2 + R_i^2\right)$$

L'equazione differenziale del moto è dunque:

$$\frac{m}{2}\left(3R_e^2 + R_i^2\right)\ddot{\theta} + 4kR_e^2\theta = 0$$

2) Dividendo tutto per J_O:

$$\ddot{\theta} + \frac{8kR_e^2}{m\left(3R_e^2 + R_i^2\right)}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{8kR_e^2}{m\left(3R_e^2 + R_i^2\right)}} = 2\sqrt{2}R_e\sqrt{\frac{k}{m\left(3R_e^2 + R_i^2\right)}}$$

3) Trovandoci in condizioni ideali di assenza di smorzamento ($\zeta = 0$), la soluzione dell'equazione differenziale del moto assume la forma:

$$\theta(t) = C\sin(\omega_n t + \varphi)$$

dove le due costanti C (ampiezza) e φ (fase) si determinano usando le condizioni iniziali date, $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$, cioè risolvendo il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite (C, φ):

$$\begin{cases} \theta(0) = C\sin\varphi = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = C\omega_n\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

Quadrando e sommando le due equazioni si ottiene:

$$C = \theta_0$$

e con $C = \theta_0$ si determina la fase φ ottenendo $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$ dalle due equazioni del sistema sopra, da cui:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

La legge del moto è quindi:

$$\theta(t) = \theta_0\sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right)$$