UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

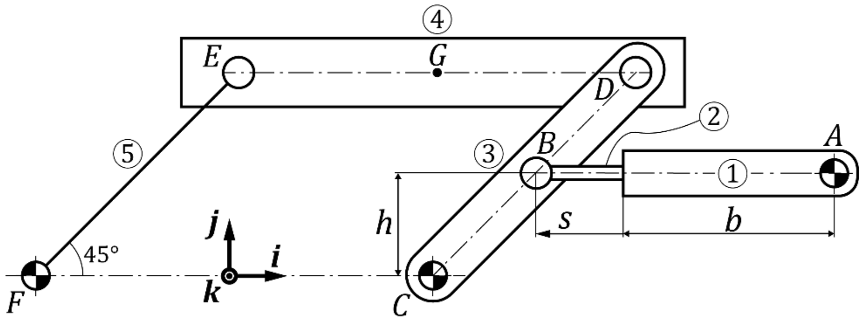
25 gennaio 2022

ESAME DI MECCANICA I – VERSIONE A

— Primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria* (cod. 842II), CdS in Ing. Biomedica —

Esercizio 1

In figura è rappresentato un sollevatore. I corpi 1 e 2, collegati da una coppia prismatica mobile, realizzano un attuatore lineare. Le cerniere B, C, D sono allineate e $\overline{CB} = \overline{BD}$. Inoltre, $\overline{CD} = \overline{FE}$, $\overline{ED} = \overline{FC}$ e $\overline{EG} = \overline{GD}$. Nella configurazione rappresentata in figura sono note le quantità geometriche riportate (s è una coordinata relativa) ed i seguenti valori numerici:



$s = 0.1$ m, $\dot{s} = 0.05$ m/s, $\ddot{s} = 0$, $b = 0.4$ m, $h = 0.25$ m.

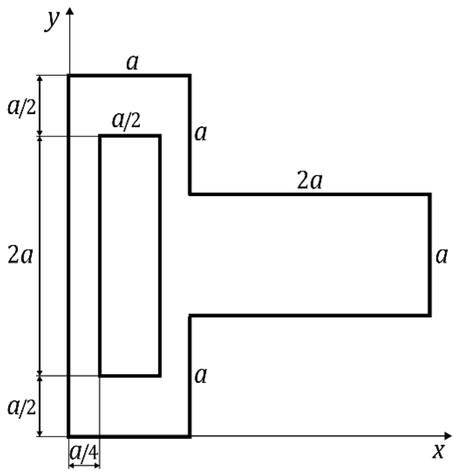
1) Determinare numericamente le componenti della velocità del centro di massa della piattaforma (punto $G \in 4$) in una terna avente i versori $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ indicati.
2) Determinare graficamente i centri delle velocità assoluti dei cinque corpi.
3) Determinare numericamente le componenti dell'accelerazione del punto $G \in 4$ nella stessa terna adottata al punto 1.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1 sotto l'azione della forza di gravità, assumendo che solo la piattaforma 4 abbia una massa m (nota) non trascurabile. L'attuatore lineare idraulico (corpi 1+2) dovrà esercitare una forza $\boldsymbol{F}$ sull'asta 3 per assicurare condizioni di equilibrio statico nella configurazione rappresentata.

1) Determinare simbolicamente (quindi senza utilizzare i valori numerici forniti nell'esercizio 1) la forza $\boldsymbol{F}$ e tutte le altre forze/coppie reattive.
2) Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

Esercizio 3



La figura a T forata rappresentata a lato è omogenea. Assumendo che la lunghezza a sia pari a 4 cm, si determinino numericamente le coordinate (x_G, y_G) del suo centro di massa nel sistema di riferimento assegnato.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

SOLUZIONE <u>VERSIONE A</u>

N.B. Le soluzioni delle altre versioni (B, C, D) sono perfettamente analoghe.

Esercizio 1

1) L'attuatore lineare (corpi 1+2) aziona un parallelogramma articolato (sottosistema 3+4+5) di cui la piattaforma 4 è la biella: è ben noto che questa si muove di moto traslatorio curvilineo, quindi tutti i suoi punti hanno stessa velocità e stessa accelerazione. Possiamo quindi affermare che:

$$\boldsymbol{v}_{G\in 4} = \boldsymbol{v}_{D\in 4} = \boldsymbol{v}_{D\in 3} = \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CD$$

Possiamo determinare $\dot{\theta}_3$ chiudendo il problema delle velocità del sotto-meccanismo 1+2+3 sul punto notevole B. Mettendosi solidali a 1:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 2} = \boldsymbol{v}_{B\in 2}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{v}_{B\in 2}^{(\mathrm{tr})} = \dot{s}(-\mathbf{i}) + \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB$$

Tale velocità deve essere uguale a $\boldsymbol{v}_{B\in 3} = \dot{\theta}_3 \boldsymbol{k} \times CB$, da cui l'equazione di chiusura:

$$\dot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CB = -\dot{s}\mathbf{i} + \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB$$

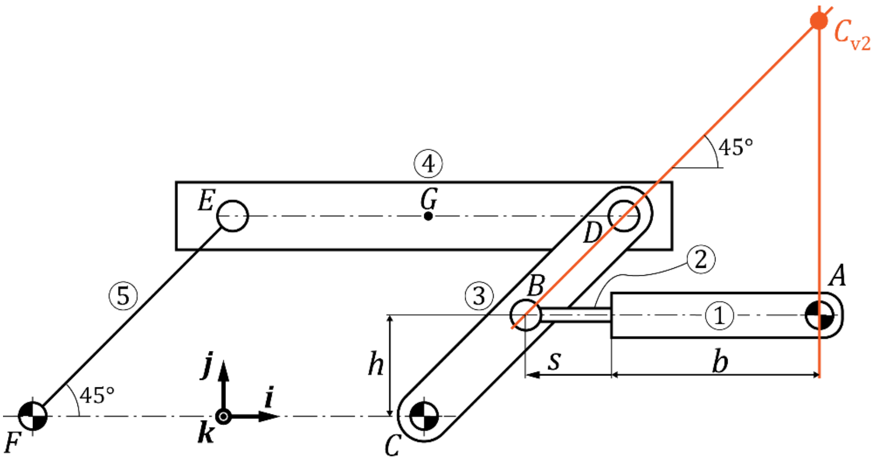
Risolvendo con $CB = (h, h)$ e $AB = (-(b+s), 0)$ si ottiene:

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{\dot{s}}{b+s} = -0.1 \text{ rad/s}; \qquad \dot{\theta}_3 = \frac{\dot{s}}{h} = 0.2 \text{ rad/s}$$

Infine, con $CD = (2h, 2h)$:

$$\boldsymbol{v}_{G\in 4} = \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CD = (-2\dot{s}, 2\dot{s}) = (-0.1, 0.1) \text{ m/s}$$

2) $C_{v1} = A$, $C_{v3} = C$, C_{v4} non esiste (moto traslatorio), $C_{v5} = F$, C_{v2} in figura:



3) Ripetendo esattamente gli stessi ragionamenti adottati per le velocità, si giunge intanto alla seguente equazione di chiusura:

$$\ddot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CB - \dot{\theta}_3^2 CB = \ddot{s}(-\mathbf{i}) + \ddot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB - \dot{\theta}_1^2 AB + 2\dot{\theta}_1 \boldsymbol{k} \times \dot{s}(-\mathbf{i})$$

NOTA: dato che siamo interessati solo a $\ddot{\theta}_3$ per poi ottenere la $\boldsymbol{a}_{G\in 4}$ come $\ddot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CD - \dot{\theta}_3^2 CD$, per fare meno calcoli si potrebbe moltiplicare l'equazione di chiusura scalarmente per il versore $\mathbf{i}$ (in tal modo scompare il termine in $\ddot{\theta}_1$ e l'accelerazione di Coriolis).

Tenendo conto che $\ddot{s} = 0$, risolvendo si ottiene:

$$\ddot{\theta}_3 = -\left(\frac{b+s}{h}\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3^2\right) = -0.06 \text{ rad/s}^2$$

Infine:

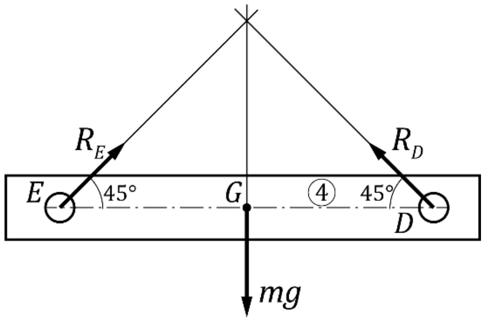
$$\boldsymbol{a}_{G\in 4} = \ddot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CD - \dot{\theta}_3^2 CD = (0.01, -0.05) \text{ rad/s}^2$$

Esercizio 2

1) Considerando che l'asta 5 è scarica, è nota la retta di applicazione della reazione $\boldsymbol{R}_E$. Isolando il corpo 4 e imponendo il rispetto della seconda equazione cardinale della statica per via grafica (tre forze non parallele le cui rette di applicazione devono concorrere in un punto):

$$\textbf{i)}\ R_E \frac{\sqrt{2}}{2} = R_D \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow R_E = R_D$$

$$\textbf{j)}\ R_E \frac{\sqrt{2}}{2} + R_D \frac{\sqrt{2}}{2} = mg$$

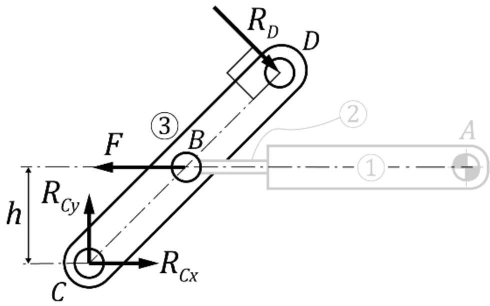


Risolvendo si ottiene subito $R_E = R_D = mg/\sqrt{2}$ (uguale anche a R_F, non indicata ma agente sull'asta 5 in modo da formare una coppia a braccio nullo con R_E, v. DCL finali risolti). Adesso isoliamo il corpo 3:

$$\textbf{i)}\ R_{Cx} - F + R_D \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

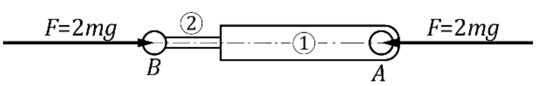
$$\textbf{j)}\ R_{Cy} - R_D \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

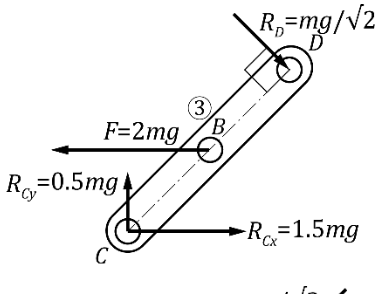
$$C)\ Fh = R_D 2\sqrt{2}h$$

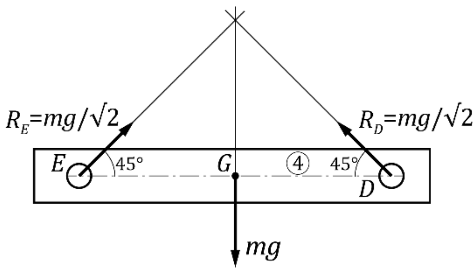


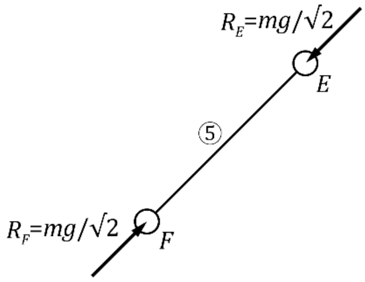
(Naturalmente, il fatto che la forza F esercitata dall'attuatore sia orizzontale deriva dall'equilibrio statico dell'attuatore stesso, tenuto conto che il sottosistema 1+2 è scarico). Risolvendo queste semplici equazioni si ottiene: $F = 2mg$, $R_{Cx} = \frac{3}{2}mg$, $R_{Cy} = \frac{1}{2}mg$.

2) I DCL risolti sono dunque i seguenti:





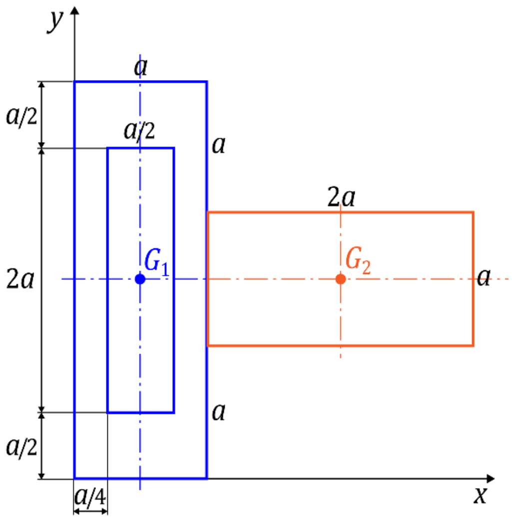




UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

Esercizio 3

Nella figura possono essere facilmente individuate due sotto-figure 1 e 2 i cui baricentri G_1 e G_2 sono di immediata determinazione (v. assi di simmetria ortogonale in blu per 1 e in arancione per 2).



Intanto è immediato determinare $y_G = \frac{3}{2}a$.

Per determinare x_G basta sfruttare la relazione:

$$x_G = \frac{A_1 x_{G1} + A_2 x_{G2}}{A_1 + A_2} = \frac{(3a^2 - a^2)\frac{a}{2} + (2a^2)2a}{(3a^2 - a^2) + (2a^2)} = \frac{5}{4}a$$

Sapendo che $a = 4$ cm si ottiene:

$$(x_G, y_G) = (5\text{ cm}, 6\text{ cm})$$