UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

10 gennaio 2022

ESAME DI MECCANICA I – VERSIONE A

— Primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria* (cod. 842II), CdS in Ing. Biomedica —

Esercizio 1


Figura 1

In Fig. 1 è rappresentato un dispositivo per l'esecuzione dell'esercizio di *leg press*. Il meccanismo del sedile (corpo 2) è mostrato in Fig. 2, in cui il corpo 0 è parte del telaio della macchina. Nella configurazione rappresentata sono note, oltre alla coordinata x e alle sue derivate temporali, le quantità geometriche riportate in Fig. 2.

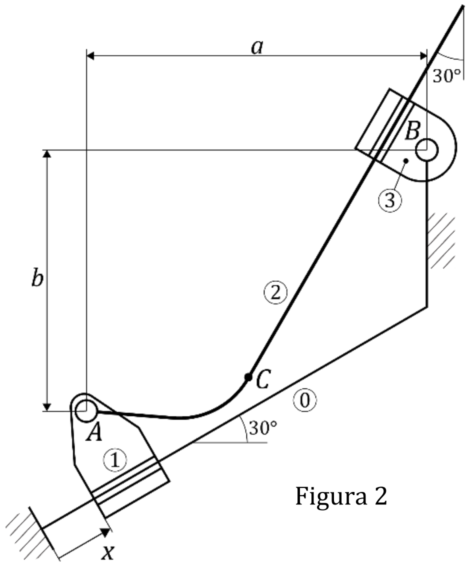


Figura 2

1. Determinare graficamente il centro delle velocità C_{v2} e la direzione della velocità del punto $C \in 2$.
2. Determinare graficamente il centro delle velocità relativo C_{v13}.
3. Risolvere il problema delle velocità per determinare, in funzione dei dati del problema, le espressioni della velocità angolare del corpo 2, di quella del corpo 3, e della velocità relativa di 2 rispetto a 3.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1, mostrato in Fig. 3. Nella configurazione rappresentata, il gruppo pesi della macchina, attraverso un sistema di cavi e pulegge, esercita la forza *nota* $\boldsymbol{P}$ sul corpo 1. Per mantenere condizioni di equilibrio statico, l'atleta reagisce in modo da esercitare, sul sedile 2, una forza $\boldsymbol{F}$ di cui è *nota la retta di applicazione* (Fig. 3). Sono note tutte le quantità geometriche riportate in Fig. 3.

1. Determinare la forza $\boldsymbol{F}$ e tutte le altre forze/coppie reattive.
2. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

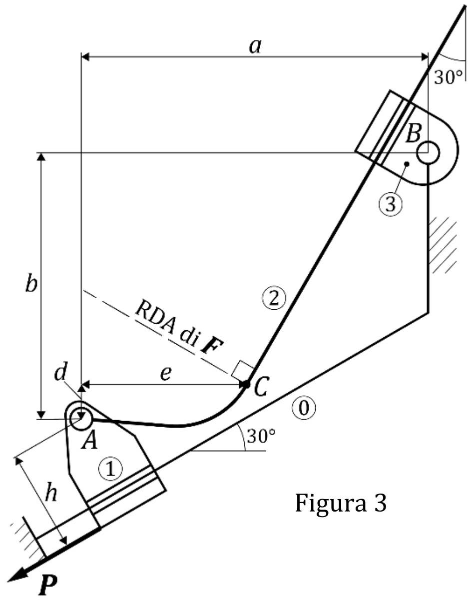
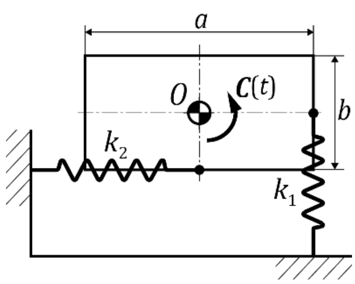


Figura 3

Esercizio 3

Il rettangolo omogeneo di massa m rappresentato a lato è incernierato al telaio attraverso la cerniera fissa O. Su di esso agisce una coppia $C(t) = C_0 \cos(\Omega t)$ (verso positivo in figura).

1. Assumendo valida l'ipotesi di piccole oscillazioni, ottenere l'equazione del moto.
2. Assumendo m = 3 kg, k_1 = 2000 N/m, k_2 = 4500 N/m, $a = 2b$, ottenere il valore numerico di Ω per il quale si hanno condizioni di risonanza.



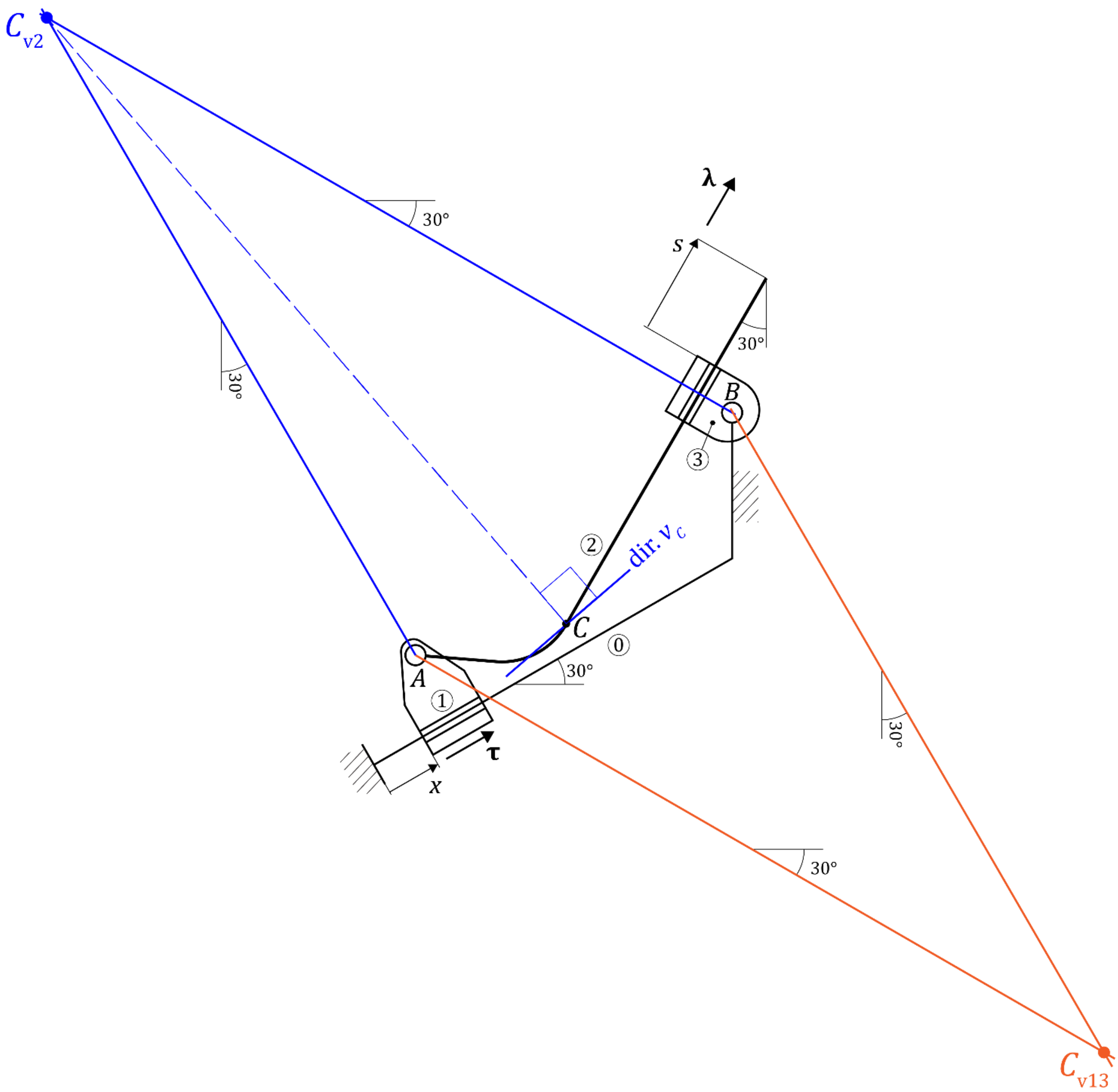
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

SOLUZIONE VERSIONE A

N.B. Le soluzioni delle altre versioni (B, C, D) sono perfettamente analoghe.

Esercizio 1

1. Vedere la costruzione grafica sotto (applicazione del teorema di Chasles)
2. Vedere la costruzione grafica sotto (applicazione del teorema di Chasles)



3. Si può ottenere l'equazione di chiusura delle velocità chiudendo sul punto notevole A:

$$\boldsymbol{v}_{A\in 1} = \boldsymbol{v}_{A\in 2}$$

dove $\boldsymbol{v}_{A\in 1} = \dot{x}\boldsymbol{\tau}$, con $\boldsymbol{\tau} = \left(\sqrt{3}/2, 1/2\right)$ (v. figura sopra). Mettendosi solidali al corpo 3, con la composizione dei moti possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{v}_{A\in 2} = \boldsymbol{v}_{A\in 2}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{v}_{A\in 2}^{(\mathrm{tr})} = \dot{s}\boldsymbol{\lambda} + \dot{\theta}_3 \boldsymbol{k} \times BA$$

con $\boldsymbol{\lambda} = \left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ (figura sopra) e l'angolo θ_3 positivo se antiorario. Allora l'equazione di chiusura è:

$$\dot{x}\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\boldsymbol{\lambda} + \dot{\theta}_3 \boldsymbol{k} \times BA,$$

con $BA = (-a, -b)$. Risolvendo si ottiene:

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{x}}{a + \sqrt{3}b} = \dot{\theta}_2, \qquad \dot{s} = \frac{\sqrt{3}a + b}{a + \sqrt{3}b}\dot{x}$$

4. Per l'equazione di chiusura delle accelerazioni si prosegue allo stesso modo, chiudendo su A:

$$\boldsymbol{a}_{A\in 1} = \boldsymbol{a}_{A\in 2}$$

dove $\boldsymbol{a}_{A\in 1} = \ddot{x}\boldsymbol{\tau}$. Mettendosi solidali al corpo 3:

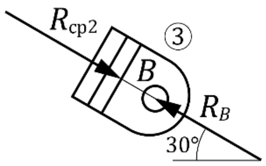
$$\boldsymbol{a}_{A\in 2} = \boldsymbol{a}_{A\in 2}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{a}_{A\in 2}^{(\mathrm{tr})} + \boldsymbol{a}_{A\in 2}^{(\mathrm{Co})} = \ddot{s}\boldsymbol{\lambda} + \ddot{\theta}_3 \boldsymbol{k} \times BA - \dot{\theta}_3^2 BA + 2\dot{\theta}_3 \boldsymbol{k} \times \dot{s}\boldsymbol{\lambda}$$

L'equazione di chiusura delle accelerazioni, nelle incognite $\ddot{s}$ e $\ddot{\theta}_3$, è quindi:

$$\ddot{x}\boldsymbol{\tau} = \ddot{s}\boldsymbol{\lambda} + \ddot{\theta}_3 \boldsymbol{k} \times BA - \dot{\theta}_3^2 BA + 2\dot{\theta}_3 \boldsymbol{k} \times \dot{s}\boldsymbol{\lambda}$$

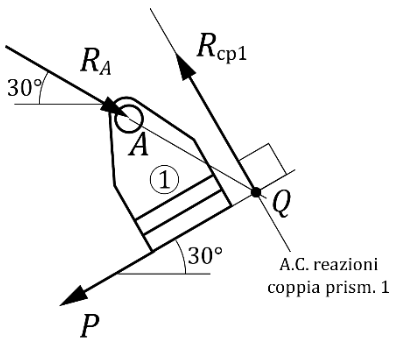
Esercizio 2

1. Il corpo 3 è scarico:



$$R_{\mathrm{cp2}} = R_B$$

La forza $\boldsymbol{P}$ agente sul corpo 1 è nota, ma su tale corpo si hanno complessivamente 4 componenti incognite delle reazioni vincolari (non è isostatico). Per velocizzare la soluzione, consideriamo l'equilibrio del corpo 2 (v. DCL di 2 nella prossima pagina): è immediato osservare che la reazione $\boldsymbol{R}_{\mathrm{cp2}}$ e la retta di applicazione della $\boldsymbol{F}$ sono parallele, dunque, per il rispetto della prima cardinale, la reazione $\boldsymbol{R}_A$ deve essere parallela a entrambe. Alla luce di questa considerazione, la retta di applicazione della $\boldsymbol{R}_A$ è quindi nota, e il DCL del corpo 1 è il seguente:



- prima cardinale secondo il versore $\boldsymbol{\tau}$:

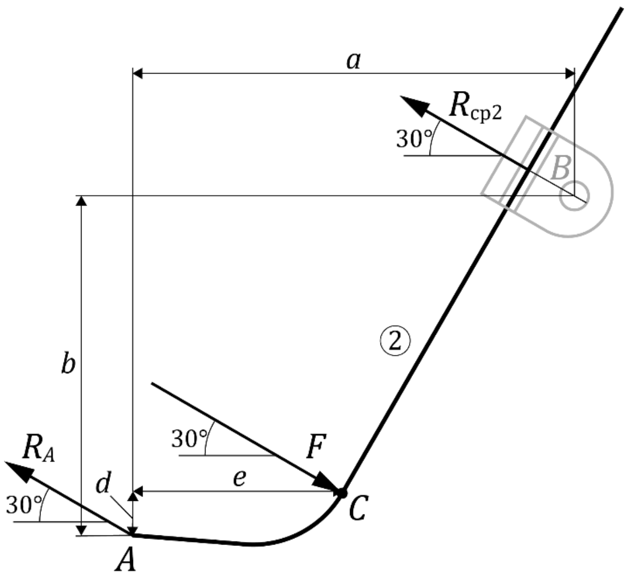
$$R_A \frac{1}{2} - P = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = 2P$$

- prima cardinale in direzione ortogonale a $\boldsymbol{\tau}$:

$$-R_A \frac{\sqrt{3}}{2} + R_{\mathrm{cp1}} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\mathrm{cp1}} = \sqrt{3}P$$

Ovviamente la seconda cardinale è già soddisfatta (3 reazioni concorrenti nel punto Q); in alternativa si poteva applicare la $\boldsymbol{R}_{\mathrm{cp1}}$ in un punto arbitrario (ad esempio sulla mezzeria della coppia prismatica) ed aggiungere una coppia reattiva $\boldsymbol{M}_{\mathrm{cp1}}$, da determinare imponendo il rispetto della seconda cardinale.

A questo punto si può concludere con il corpo 2:



- prima cardinale:

$$R_A + R_{cp2} - F = 0$$

- seconda cardinale rispetto ad A (è comodo lavorare con le componenti orizzontali e verticali di $\boldsymbol{R}_{cp2}$ ed $\boldsymbol{F}$):

$$R_{cp2}\frac{\sqrt{3}}{2}b + R_{cp2}\frac{1}{2}a - F\frac{\sqrt{3}}{2}d - F\frac{1}{2}e = 0$$

Mettendole a sistema (ricordando che $R_A = 2P$) e risolvendo, si ottiene:

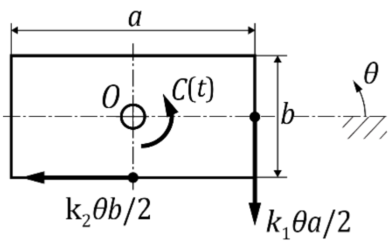
$$F = \frac{2(a+\sqrt{3}b)}{(a-e)+\sqrt{3}(b-d)}P$$

$$R_{cp2} = \frac{2(\sqrt{3}d+e)}{(a-e)+\sqrt{3}(b-d)}P = R_B$$

2. (I DCL risolti non vengono riportati perché la F e tutte le reazioni vincolari ottenute, evidenziate in giallo, sono positive e rappresentate chiaramente nei DCL sopra.)

Esercizio 3

1. Il rettangolo in questione compie un moto puramente rotatorio attorno alla cerniera di centro O, dunque ha un solo grado di libertà: parametrizziamo tale rotazione con un angolo θ. Partiamo dal suo DCL in configurazione variata (di poco, trattandosi di piccole oscillazioni). In esso non è stata rappresentata la reazione $\boldsymbol{R}_O$ perché non siamo interessati al suo contributo, dato che per ottenere l'equazione del moto basta scrivere direttamente la seconda cardinale della dinamica rispetto al centro di massa O:



$$C(t) - k_1\frac{a^2}{4}\theta - k_2\frac{b^2}{4}\theta = J_O\ddot{\theta} = \frac{m}{12}(a^2+b^2)\ddot{\theta}$$

(molle a riposo per $\theta = 0$)

Sostituendo $a = 2b$, l'equazione del moto diventa:

$$\frac{5}{12}mb^2\ddot{\theta} + (4k_1+k_2)\frac{b^2}{4}\theta = C(t)$$

2. Si hanno condizioni di risonanza se $\Omega = \omega_n$, e per determinare la pulsazione naturale ω_n basta considerare la versione omogenea dell'equazione del moto e dividere tutto per $\frac{5}{12}mb^2$:

$$\ddot{\theta} + \frac{3(4k_1+k_2)}{5m}\theta = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

La pulsazione naturale del sistema è quindi:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3(4k_1+k_2)}{5m}} = 50\ \text{rad/s}$$