UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

3 Febbraio 2020

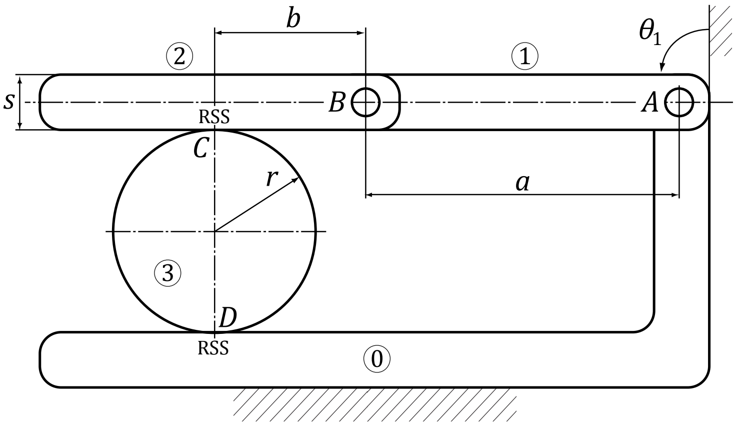
ESAME DI MECCANICA I

— Primo modulo dell'insegnamento *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria* —

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

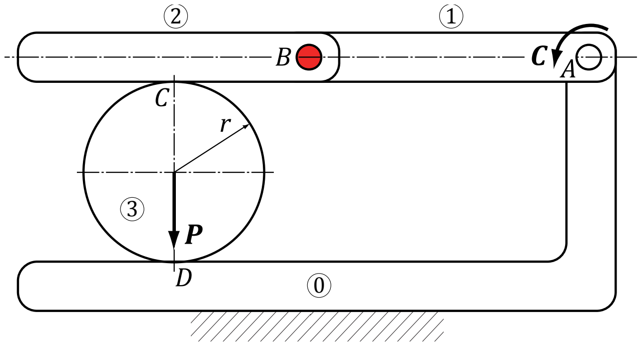
In figura è rappresentato un semplice manipolatore planare costituito dal corpo fisso 0 e dai due corpi mobili 1 e 2. Tale meccanismo sta manipolando il corpo mobile 3. In corrispondenza dei punti di contatto C e D sono presenti condizioni di rotolamento senza strisciamento. Nella configurazione rappresentata sono noti: i valori della coordinata lagrangiana θ_1 e delle sue derivate temporali; le lunghezze a = 5 cm, b = 2.5 cm, r = 1.5 cm, s = 0.75 cm.



1. Assumendo $\dot{\theta}_1 = -2$ rad/s (oraria), determinare la velocità angolare del corpo 2 e la velocità del centro del disco 3. A titolo di conferma, ottenere per via grafica triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
2. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
3. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

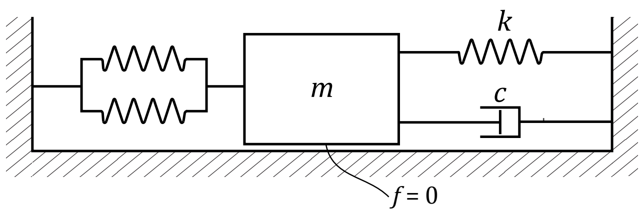
Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Attraverso la cerniera A viene applicata al corpo 1 una coppia esterna $\boldsymbol{C}$ di modulo 3 Nm, come mostrato in figura. Inoltre, una forza $\boldsymbol{P}$ di modulo 60 N agisce sul corpo 3 (v. figura). La cerniera B è attiva. Il rotolamento senza strisciamento in C e in D è affidato a vincoli monolaterali di contatto (puntiforme) con attrito.



1. Determinare la coppia interna richiesta alla cerniera attiva B per ottenere condizioni di equilibrio statico e tutte le corrispondenti forze/coppie reattive.
2. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.
3. Determinare i minimi valori dei coefficienti d'attrito statico in C e D necessari per garantire condizioni di equilibrio nella configurazione analizzata.

Esercizio 3

Come mostrato in figura, il corpo di massa m trasla su di un piano orizzontale liscio sotto l'azione di tre molle, ciascuna di costante elastica k, e di uno smorzatore viscoso avente coefficiente di smorzamento c.



Determinare, in funzione dei dati del problema, quale deve essere il valore minimo del coefficiente di smorzamento c affinché le oscillazioni libere del corpo abbiano un andamento aperiodico smorzato.

- ESERCIZIO 1 -

1) Per ottenere l'eq.^{ne} di chiusura delle velocità si può chiudere, ad esempio, su C:

$$\underline{v}_{CE2} = \underline{v}_{BE2} + \dot\theta_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC} = \dot\theta_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} + \dot\theta_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC}$$

$$\underline{v}_{BE2} = \underline{v}_{BE1} = \dot\theta_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB}$$

Avendo RSS in C, deve valere $\underline{v}_{CE2} = \underline{v}_{CE3} = \dot\theta_3 \underline{k} \times \overrightarrow{DC}$

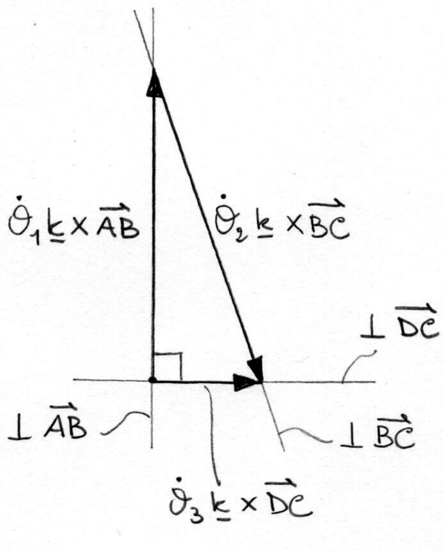
Pertanto:

$$\dot\theta_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} + \dot\theta_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC} = \dot\theta_3 \underline{k} \times \overrightarrow{DC}$$ <u>eq.^{ne} di chiusura</u>

Risolvendo (per via analitica o grafica):

- $\dot\theta_2 = -\dfrac{a}{b}\dot\theta_1 = 4 \ \dfrac{rad}{s}$
- $\dot\theta_3 = \dfrac{a s}{4 b r}\dot\theta_1 = -\dfrac{1}{2} \ \dfrac{rad}{s}$

Triangolo delle velocità:



$\dot\theta_1 < 0$

$\downarrow$

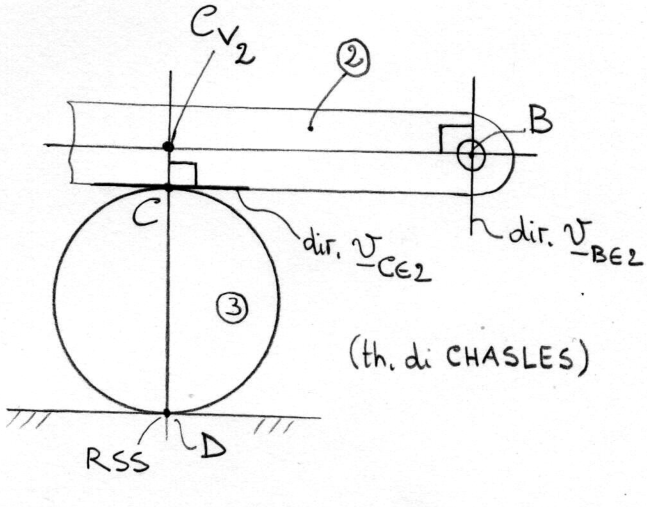
$\dot\theta_2 > 0$

$\dot\theta_3 < 0$ ✓

2) $C_{v_1} \equiv A$ (cerniera fissa)

$C_{v_3} \equiv D$ (RSS su telaio

C_{v_2}:

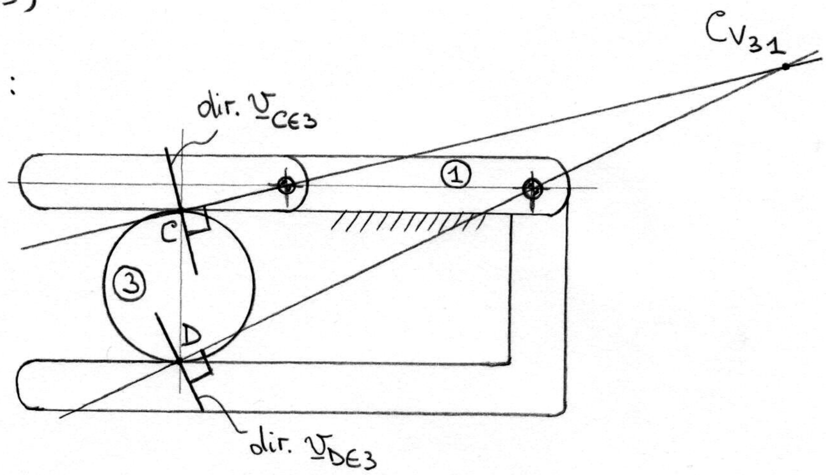


(th. di CHASLES)

$C_{V_{12}} \equiv B$ (cerniera mobile)

$C_{V_{23}} \equiv C$ (RSS)

$C_{V_{13}}$, o $C_{V_{31}}$:



3) A differenza del punto 1, in cui $\underline{v}_{CE2} = \underline{v}_{CE3}$, in C abbiamo che $\underline{a}_{CE2} \neq \underline{a}_{CE3}$ (è presente un vincolo RSS). Si può però procedere scrivendo, ad esempio, due espressioni diverse di $\underline{a}_{CE2}$, per poi eguagliarle e ottenere l'eq.^{ne} di chiusura.

$$\underline{a}_{CE2} = \underline{a}_{BE2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BC}$$

$$\underline{a}_{BE2} = \underline{a}_{BE1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB}$$

Adesso possiamo scrivere un'altra espressione di $\underline{a}_{CE2}$ passando dal disco 3 e sfruttando i moti relativi:

$$\Sigma③: \quad \underline{a}_{CE2} = \underline{a}_{CE2}^{(r)} + \underline{a}_{CE2}^{(tr)} + \underline{a}_{CE2}^{(Co)} \quad , \quad \text{dove:}$$

- $\underline{a}_{CE2}^{(r)} = r(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2 \underline{J}$ (serve $\underline{\omega}_2^{(r)}$)
- $\underline{a}_{CE2}^{(tr)} = r\dot{\theta}_3^2 \underline{J} + \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{DC} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{DC}$ (in cui $r\dot{\theta}_3^2 \underline{J} = \underline{a}_{DE3} = \underline{a}_{CV_3}$)
- $\underline{a}_{CE2}^{(Co)} = 2\dot{\theta}_3 \underline{k} \times \underbrace{\underline{v}_{CE2}^{(r)}}_{\underline{0}} = \underline{0}$

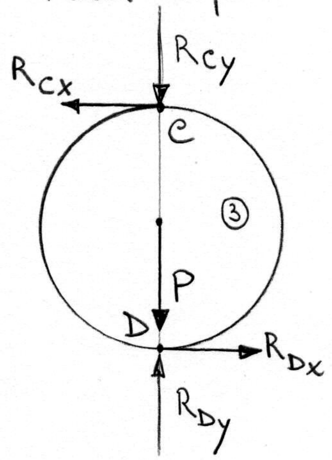
Uguagliando le due espressioni di $\underline{a}_{CE3}$ si ottiene l'eq.^{ne} di chiusura:

$$\ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BC} = r(\dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3)\underline{J} + \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{DC} \, ,$$

semplificata sfruttando la relazione $\dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{DC} = \dot{\theta}_3^2 \, 2r\underline{J}$.

– Esercizio 2 –

1) Analisi corpo 3:

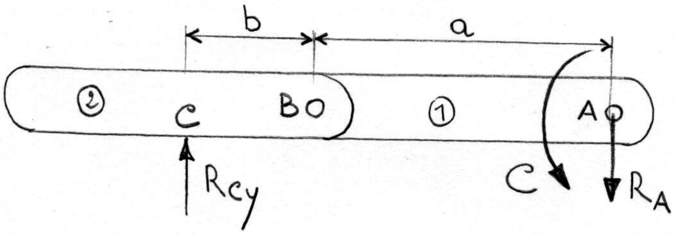


$\circlearrowleft$ D) $R_{Cx}(2r) = 0 \rightarrow R_{Cx} = 0$

$\underline{i}$) $R_{Cx} = R_{Dx} = 0$

$\underline{j}$) $R_{Dy} = P + R_{Cy}$

Si può considerare il sottosistema ① + ② (la coppia interna in B non è visibile, ovviamente):



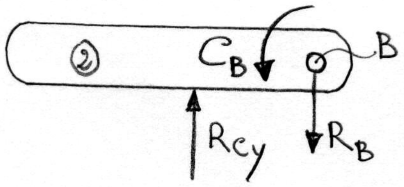
$\circlearrowleft$ A) $R_{Cy}(a+b) = C \rightarrow R_{Cy} = \dfrac{C}{a+b} = 40\ N$

$\underline{j}$) $R_A = R_{Cy} = 40\ N$

$\downarrow$

$R_{Dy} = 100\ N$
(v. sopra)

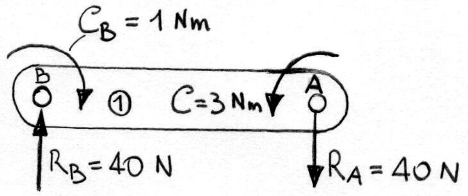
Adesso si può isolare il corpo 2:

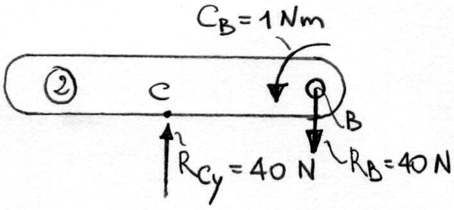


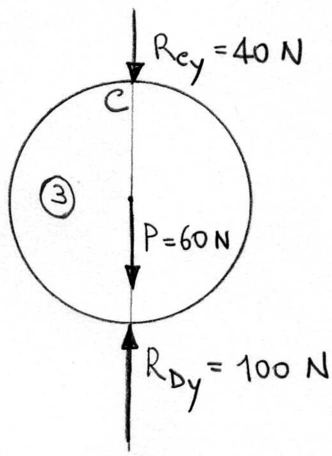
$\circlearrowleft$ B) $R_{Cy}\,b = C_B \rightarrow C_B = 1\ Nm$

$\underline{j}$) $R_B = R_{Cy} = 40\ N$

2) DCL risolti:



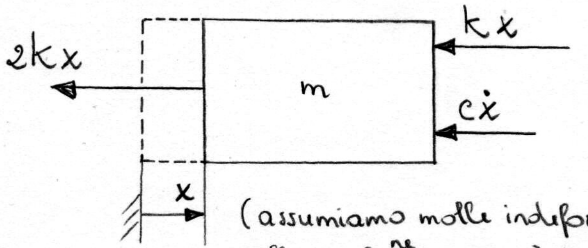




3) I coeff. d'attrito statico in C e D possono essere nulli in questa configurazione: infatti, le componenti tangenziali delle reazioni in C e in D, ovvero R_{Cx} e R_{Dx}, sono entrambe nulle.

– ESERCIZIO 3 –

DCL (solo carichi orizzontali, agenti nella direzione del moto):



$$-2kx - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

(assumiamo molle indeformate nella config.ne $x = 0$)

L'equazione del moto è quindi:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 3kx = 0 \qquad \text{(pb. di oscillazioni libere)}$$

Dividendo per la massa:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{3k}{m}x = 0$$

e confrontandola con l'eq.ne del moto in forma canonica:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

si ottiene:

- $\omega_n = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$, e quindi:

- $2\xi\omega_n = \dfrac{c}{m} \longrightarrow \xi = \dfrac{c}{2\sqrt{3km}}$

Per avere un moto aperiodico smorzato, il fattore di smorzamento ξ deve essere > 1, pertanto il valore minimo del coeff. di smorzamento è:

- $c_{min} = 2\sqrt{3km}$