Università di Pisa
Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale

14 Gennaio 2020

ESAME DI MECCANICA I

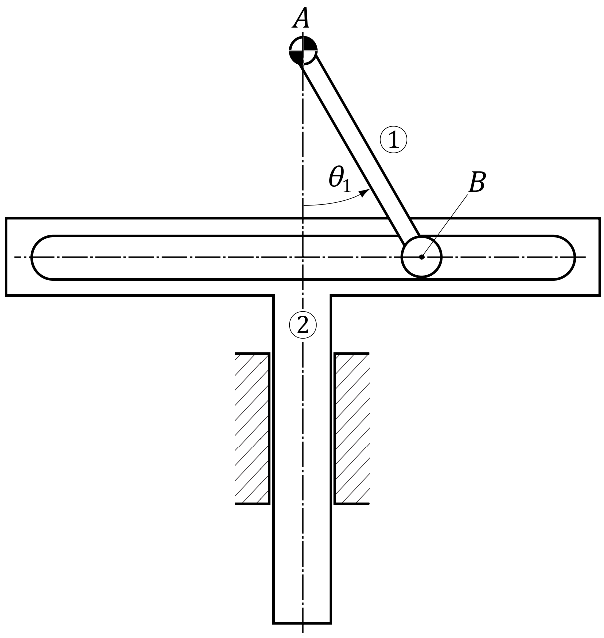
(Primo modulo dell'insegnamento *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria*)

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Il meccanismo in figura è costituito da due corpi mobili. L'estremità in basso del corpo 1 è un perno cilindrico vincolato a muoversi nell'asola rettilinea ricavata nel corpo 2. Nella configurazione rappresentata sono noti: i valori della coordinata lagrangiana $\theta_1 = 30°$ e delle sue derivate temporali; la lunghezza $\overline{AB} = a$.

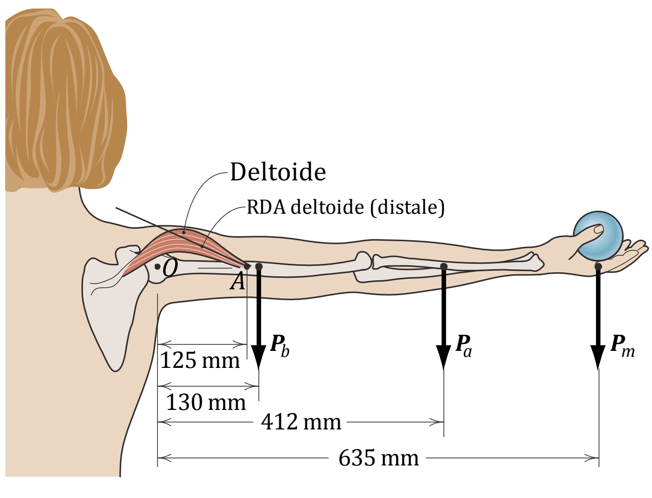
1. Determinare per via analitica la velocità del corpo 2 (in moto traslatorio rettilineo) e la velocità del centro B del perno relativa al corpo 2. A titolo di conferma, e assumendo $\dot{\theta}_1 > 0$, ottenere per via grafica triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
2. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
3. Assumendo $\dot{\theta}_1 = \text{cost.}$, determinare per via analitica l'accelerazione del corpo 2 e l'accelerazione di B relativa al corpo 2.



Esercizio 2

Con la sua mano destra, la persona in figura sta sostenendo staticamente una sfera di 3.6 kg, mantenendo l'arto destro completamente disteso. L'equilibrio statico è garantito dall'azione del muscolo deltoide, che attraverso un tendine si inserisce sull'omero in corrispondenza del punto A in figura. Come ipotesi semplificative si assuma che la retta di applicazione distale del deltoide sia inclinata di 21° rispetto all'orizzontale e che l'articolazione della spalla sia assimilabile ad una cerniera (di centro O, v. figura). Sono inoltre note le masse m_b = 1.9 kg (braccio), m_a = 1.1 kg (avambraccio), e m_m = 0.4 kg (mano); le corrispondenti forze peso hanno le rette di applicazione indicate in figura.

Determinare la forza esercitata dal deltoide e la risultante delle reazioni a carico dell'articolazione della spalla.

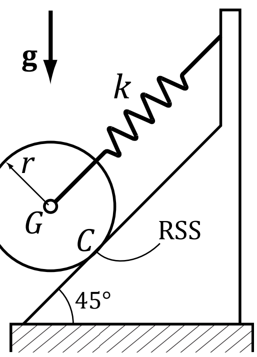


(Adattato da es. 3/40 di: Meriam-Kraige, *Engineering Mechanics: Statics*, 7th Ed.)

Esercizio 3

Su un piano inclinato fisso rotola senza strisciare un disco omogeneo di massa m e raggio r, soggetto all'azione della gravità e alla forza elastica di una molla avente costante elastica k.

Ottenere l'equazione differenziale del moto e l'espressione della pulsazione naturale del sistema in funzione dei dati del problema.



— ES. 1 —

1) $\underline{v}_{B\in 1} = \dot\theta_1 \underline{k} \times \vec{AB}$

Si può riscrivere un'altra espressione di $\underline{v}_{B\in 1}$ mettendosi solidali a 2 :

$$\Sigma ② : \quad \underline{v}_{B\in 1} = \underline{v}^{(r)}_{B\in 1} + \underline{v}^{(tr)}_{B\in 2} = \underbrace{\dot s}_{\text{coord. relativa}} \underline{i} + \underbrace{\dot y}_{\text{coord. assoluta}} \underline{J}$$

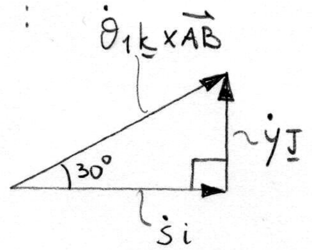
Si ottiene dunque l'eq.^{ne} di chiusura :

$$\dot\theta_1 \underline{k} \times \vec{AB} = \dot s \underline{i} + \dot y \underline{J} \qquad (\text{con } \vec{AB} = (a/2, -a\sqrt{3}/2)),$$

che risolta fornisce

- $\dot y = \dfrac{\dot\theta_1 a}{2}$ (velocità di traslazione di 2)
- $\dot s = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dot\theta_1 a$ (velocità di B relativa a 2)

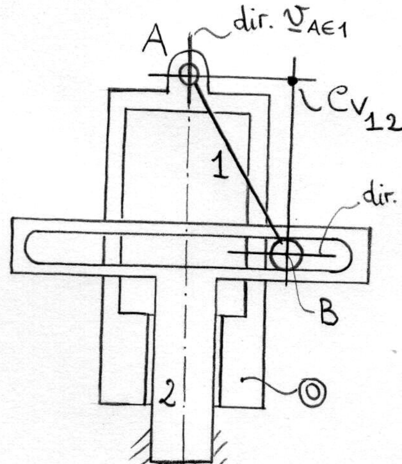
Triangolo delle velocità :



$\dot\theta_1 > 0$
$\dot y > 0$ ✓
$\dot s > 0$

2) • $C_{V_1} \equiv A$ (cerniera fissa)
• C_{V_2} non esiste (moto traslatorio)

• $C_{V_{12}}$:



3) Con lo stesso ragionamento seguito al punto 1 :

$$\underline{a}_{B\in 1} = \cancel{\ddot\theta_1}^{\,0} \underline{k} \times \vec{AB} - \dot\theta_1^2 \vec{AB}$$

$$\Sigma ② : \underline{a}_{B\in 1} = \underline{a}^{(r)}_{B\in 1} + \underline{a}^{(tr)}_{B\in 1} + \underline{a}^{(co)}_{B\in 1} = \ddot s \underline{i} + \ddot y \underline{J} \quad (\underline{a}^{(co)}_{B\in 1} = \underline{0} \text{ perché } \underline{\omega}^{(tr)} = \underline{\omega}_2 = \underline{0})$$

Eq.^{ne} di chiusura :

$$-\dot\theta_1^2 \vec{AB} = \ddot s \underline{i} + \ddot y \underline{J}$$

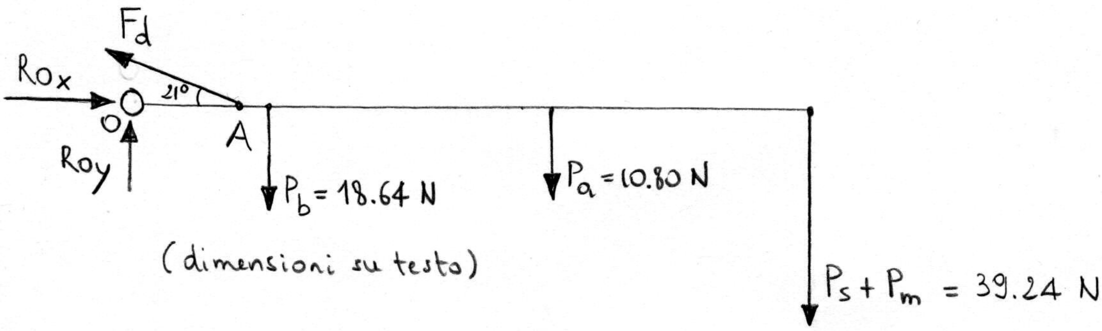
che risolta fornisce :

- $\ddot y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dot\theta_1^2 a$
- $\ddot s = -\dfrac{\dot\theta_1^2 a}{2}$

Oss. I triangoli di chiusura di velocità e accelerazioni sono rettangoli : le soluzioni potevano essere ottenute agevolmente anche per via grafica.

- Es. 2 -

DCL arto destro:



(dimensioni su testo)

Scrivendo la seconda cardinale rispetto al centro dell'articolazione della spalla (cerniera O) si ottiene immediatamente la forza esercitata dal deltoide:

$$\text{O)}\quad F_d \cdot 0.125 \sin(21°) = 18.64 \cdot 0.130 + 10.80 \cdot 0.412 + 39.24 \cdot 0.635 \longrightarrow \bullet\ F_d = 709.67 \text{ N}$$

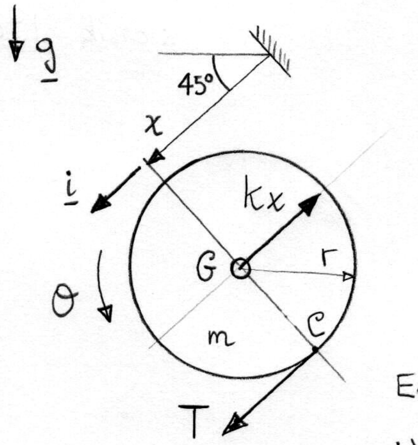
Le reazioni (R_{Ox}, R_{Oy}) si ottengono adesso direttamente dalla prima cardinale:

- $R_{Ox} = F_d \cos(21°) = 662.53$ N
- $R_{Oy} = 18.64 + 10.80 + 39.24 - F_d \sin(21°) = -185.64$ N

Modulo risultante $\underline{R}_O$:

- $\|\underline{R}_O\| = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = 688.05$ N

- Es. 3 -



Nel DCL a lato:

- $x = 0$ in condizioni di equilibrio statico (molla tesa) $\longrightarrow$ non è necessario includere $m\underline{g}$
- ai fini della scrittura dell'eq.^{ne} del moto, considero solo le forze agenti nella direzione di $\underline{i}$

Eq.^{ni} cardinali dinamica:

$\underline{i}$) $T - kx = m\ddot{x}$

$$\text{G)}\quad -Tr = J_G \ddot{\theta} \longrightarrow T = -\frac{\overset{\frac{1}{2}mr^2}{J_G}}{r}\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}mr\overset{\ddot{x}/r \text{ per RSS}}{\ddot{\theta}} = -\frac{1}{2}m\ddot{x}$$

Sostituendo l'espr. della T nella prima eq.^{ne} cardinale:

- $\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$ eq.^{ne} del moto

e dividendo tutto per $\frac{3}{2}m$:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0 \longleftrightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \longrightarrow \bullet\ \omega_n = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} \quad \text{pulsazione naturale}$$