

Capitolo 2

Statica del corpo rigido

La *statica* è la parte della meccanica che si occupa dello studio dell'equilibrio di corpi in quiete, ossia fermi, o mobili di moto rettilineo uniforme. In effetti applichiamo anche la statica a corpi che *vediamo* fermi, come un libro su un tavolo o una mensola, ma che in realtà si muovono insieme a noi con la Terra attorno al Sole. Per molti casi infatti l'influenza di questo movimento, molto lento, sull'equilibrio dei corpi è minima, ossia, come vedremo meglio in dinamica, le forze di inerzia sono trascurabili. Dopo questa precisazione, passiamo all'oggetto di questo capitolo ossia la statica del corpo rigido e dei sistemi di corpi rigidi.

Corpo rigido

Il corpo rigido è un'astrazione matematica per rappresentare un corpo indeformabile, che, rispetto al punto massa già incontrato nel corso di Fisica, ha una estensione rilevante nello spazio. Si tratta di un'astrazione perché qualsiasi corpo soggetto ad un carico si deforma, chi in modo evidente, come un elastico, chi meno, come una lastra di marmo. La caratteristica di un corpo rigido è che i suoi punti non mutano la loro distanza relativa.

2.1 Azioni su un corpo rigido

L'equilibrio di un corpo rigido dipende dalle azioni a cui è soggetto, che possono essere forze, vettori applicati, oppure momenti, che sono invece vettori liberi. Nel seguito quando si farà riferimento a forze od azioni si intenderanno in senso generalizzato, quindi sia forze che momenti.

Come mostrato in Fig. 2.1, queste azioni vengono classificate come:

- concentrate, azioni applicate in un punto,
- distribuite, come le azioni di contatto
oppure come forze esterne
- attive, quando sono direttamente applicate al corpo,
- reattive, quando rappresentano la reazione di vincoli.

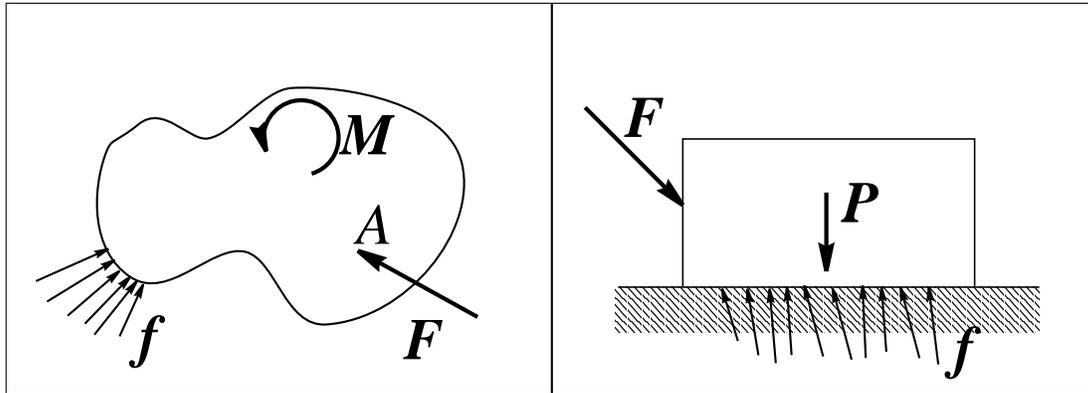


Figura 2.1: Schema di azioni su un corpo rigido.

2.2 Analisi dei vincoli

2.2.1 Vincoli nel piano

Per esprimere l'equilibrio di un corpo, come meglio specificato nel paragrafo seguente, è fondamentale riconoscere i vari tipo di vincolo per identificare le azioni che esso può esercitare sul corpo. Il concetto fondamentale in questa identificazione è che un vincolo esercita un'azione in corrispondenza di ogni movimento che impedisce, come chiarito dai singoli casi. Il problema è spesso capire quale schema di calcolo si avvicini di più alla rappresentazione di un vincolo reale.

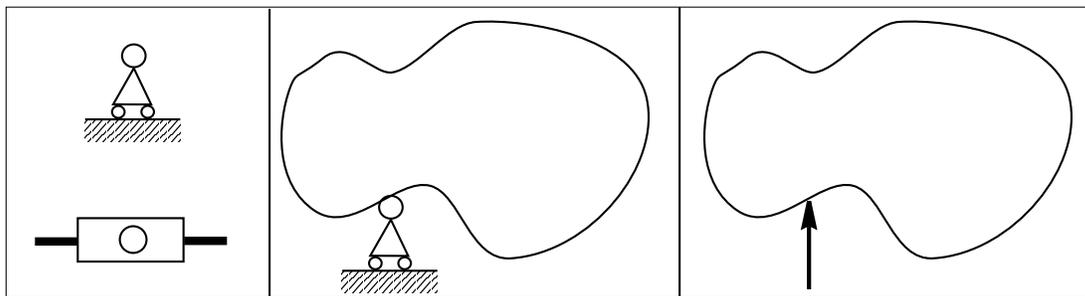


Figura 2.2: Carrello o appoggio semplice.

Appoggio semplice o carrello

Un vincolo di appoggio semplice o carrello nel piano lega un punto del corpo rigido a spostarsi su una linea lasciando il corpo libero di ruotare. Poiché impedisce al punto vincolato di allontanarsi dalla linea, l'azione che il vincolo esercita sul corpo è una forza ortogonale alla linea del vincolo, come mostrato in Fig. 2.2, ed ha direzione e punto di applicazione noti.

Coppia rotoidale o cerniera

Una coppia rotoidale impedisce lo spostamento di un punto del corpo rigido, in tutte e due le direzioni del piano, lasciandone libera la rotazione. In questo caso l'azione del vincolo ha due componenti, una per ciascuna direzione dello spostamento impedito. È noto il punto di applicazione, ma è completamente incognita la forza.

Esempi di vincoli coppia rotoidale in pratica sono numerosi, basti pensare a porte, sportelli etc., nonché all'articolazione del gomito e delle falangi nel corpo umano.

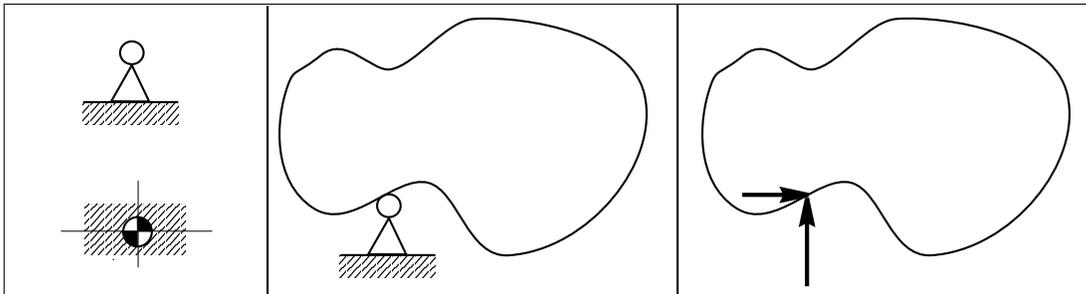


Figura 2.3: Coppia rotoidale o cerniera.

Incastro

Un incastro impedisce sia lo spostamento di un punto che la rotazione del corpo, rendendo impossibile qualsiasi movimento del corpo rigido. Risultano impediti due spostamenti e una rotazione pertanto le azioni esercitate dal vincolo sono una forza in due componenti ed un momento.

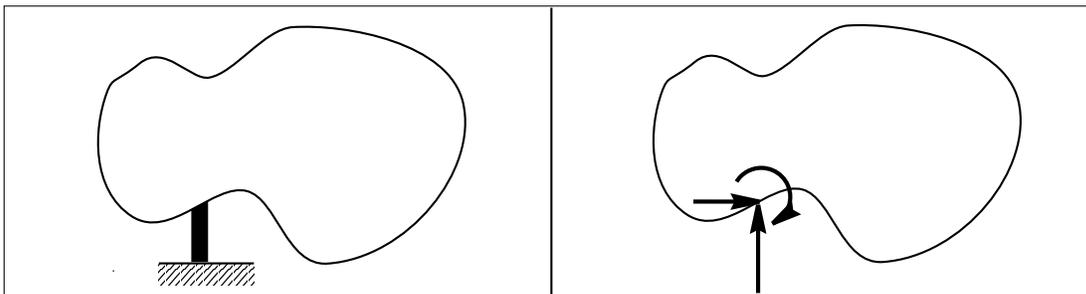


Figura 2.4: Incastro.

Nella pratica si hanno incastri ottenuti con saldature o altri collegamenti rigidi tipo viti e bulloni, come le mensole fissate nel muro, i travi degli edifici etc. L'incastro viene talvolta realizzato non in un solo punto ma in una zona del corpo, la reazione allora viene considerata in un solo punto attraverso un sistema equivalente.

Coppia prismatica

La coppia prismatica è un vincolo che consente la traslazione del corpo secondo una direzione assegnata, impedendone la rotazione e lo spostamento in un direzione ortogonale a quella individuata dalla coppia. Generalmente lo si rappresenta come un vincolo non puntuale ma distribuito su una certa zona Λ del corpo come in Fig. 2.10. In ogni punto di Λ il vincolo esercita un'azione della quale è nota la direzione λ (ortogonale alla direzione della coppia), pertanto la reazione complessiva del vincolo è rappresentata da un sistema di vettori paralleli. Pur non potendo determinare tale sistema, ai fini della statica è sufficiente conoscere un sistema ad esso equivalente, che rispetto ad un punto qualsiasi è composto da un solo vettore parallelo a λ e da un momento (oppure da solo vettore in un punto dell'asse centrale o da una sola coppia).

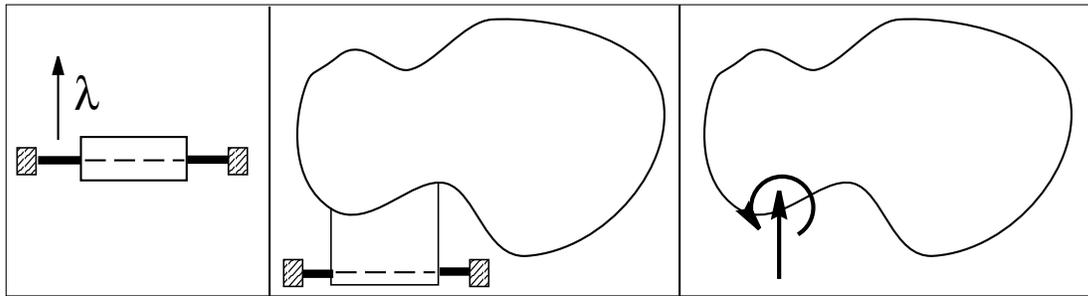


Figura 2.5: Coppia prismatica.

Un altro modo di rappresentare la coppia prismatica, si basa sull'idea di localizzare le azioni della coppia prismatica in due punti, ossia di sfruttare un sistema equivalente fatto da due vettori applicati, entrambi paralleli a λ , come mostrato in Fig. 2.6.

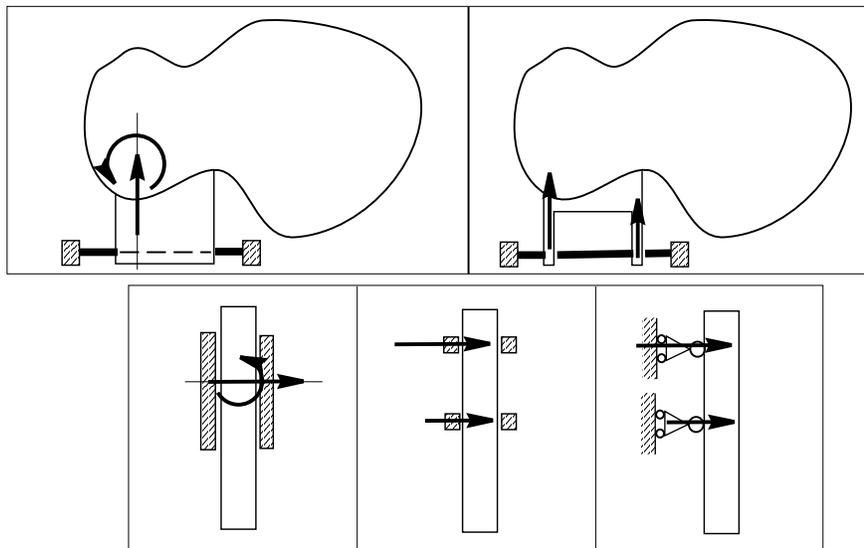


Figura 2.6: Rappresentazioni equivalenti di coppia prismatica.

2.2.2 Vincoli nello spazio

Appoggio semplice o carrello

Un vincolo di appoggio semplice o carrello nello spazio lega un punto del corpo rigido a spostarsi su un piano lasciando il corpo libero di ruotare. Impedisce al punto vincolato di allontanarsi dal piano, l'azione che il vincolo esercita sul corpo è una forza ortogonale al piano del vincolo, come mostrato in Fig. ??, ed ha direzione e punto di applicazione noti.

Vincolo di linea

Un caso ulteriore che si crea nello spazio è un vincolo di un punto a muoversi lungo una determinata traiettoria, Fig. 2.7. In questo caso il vincolo impedisce al punto di allontanarsi dalla linea con una forza nel piano ortogonale alla linea stessa, che ha due componenti incognite su tale piano.

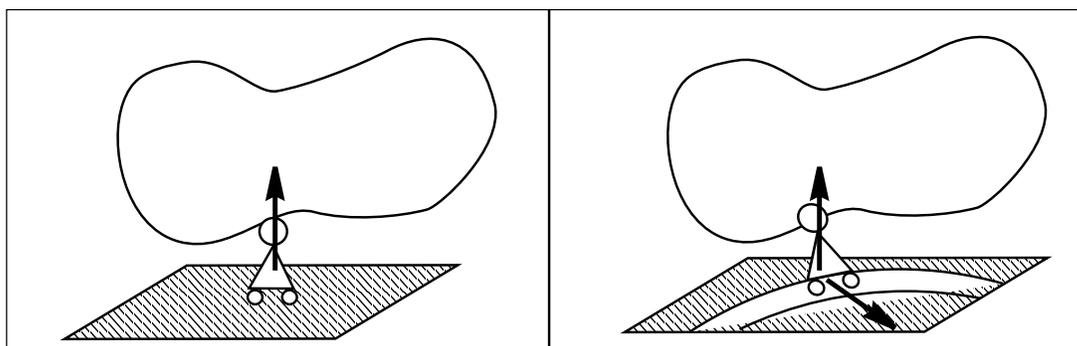


Figura 2.7: Appoggio su piano e su linea.

Coppia rotoidale

Una coppia rotoidale lascia libera la rotazione del corpo attorno all'asse della coppia r , impedisce quindi lo spostamento dei punti del corpo rigido giacenti su tale asse e le rotazioni del corpo rigido rispetto ad assi giacenti nel piano ortogonale ad r . La descrizione è complessa ma basterà avvicinarsi ad una porta o aprire l'anta di un armadio per verificarlo. In questo caso l'azione del vincolo ha due componenti, una per ciascuna direzione dello spostamento impedito. È noto il punto di applicazione, ma è completamente incognita la forza.

Esempi di vincoli coppia rotoidale in pratica sono numerosi, basti pensare a porte, sportelli etc., nonché all'articolazione del gomito e delle falangi nel corpo umano.

Incastro

Un incastro impedisce sia lo spostamento di un punto che la rotazione del corpo, rendendo impossibile qualsiasi movimento del corpo rigido. Risultano impediti due spostamenti e

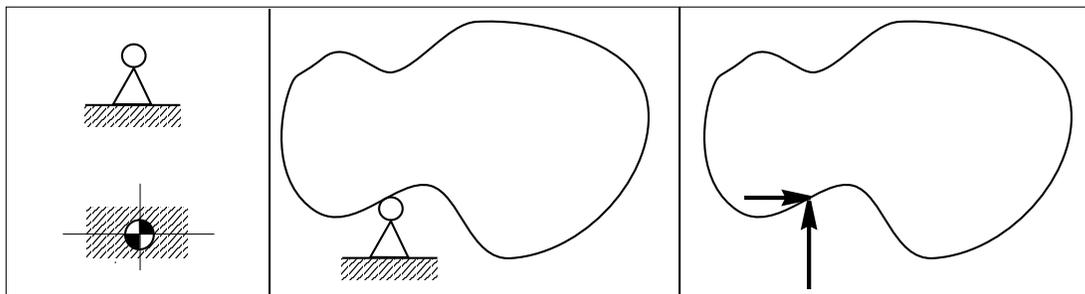


Figura 2.8: Coppia rotoidale o cerniera.

una rotazione pertanto le azioni esercitate dal vincolo sono una forza in due componenti ed un momento.

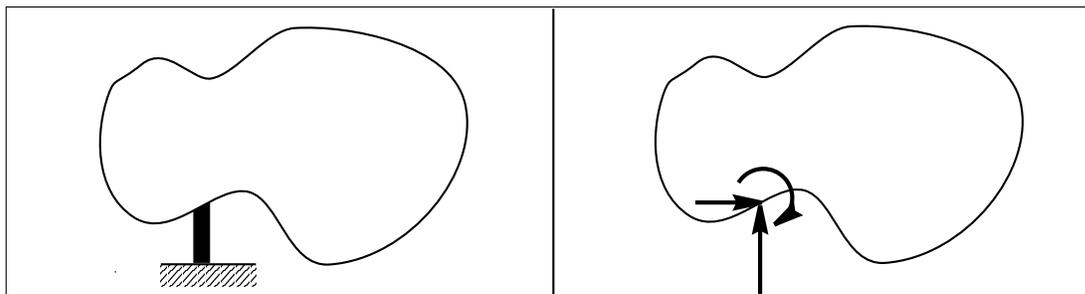


Figura 2.9: Incastro.

Nella pratica si hanno incastri ottenuti con saldature o altri collegamenti rigidi tipo viti e bulloni, come le mensole fissate nel muro, i travi degli edifici etc. L'incastro viene talvolta realizzato non in un solo punto ma in una zona del corpo, la reazione allora viene considerata in un solo punto attraverso un sistema equivalente.

Coppia prismatica

La coppia prismatica è un vincolo che consente la traslazione del corpo secondo una direzione assegnata, impedendone la rotazione e lo spostamento in un direzione ortogonale a quella individuata dalla coppia. Generalmente lo si rappresenta come un vincolo non puntuale ma distribuito su una certa zona Λ del corpo come in Fig. 2.10. In ogni punto di Λ il vincolo esercita un'azione della quale è nota la direzione λ (ortogonale alla direzione della coppia), pertanto la reazione complessiva del vincolo è rappresentata da un sistema di vettori paralleli. Pur non potendo determinare tale sistema, ai fini della statica è sufficiente conoscere un sistema ad esso equivalente, che rispetto ad un punto qualsiasi è composto da un solo vettore parallelo a λ e da un momento (oppure da solo vettore in un punto dell'asse centrale o da una sola coppia).

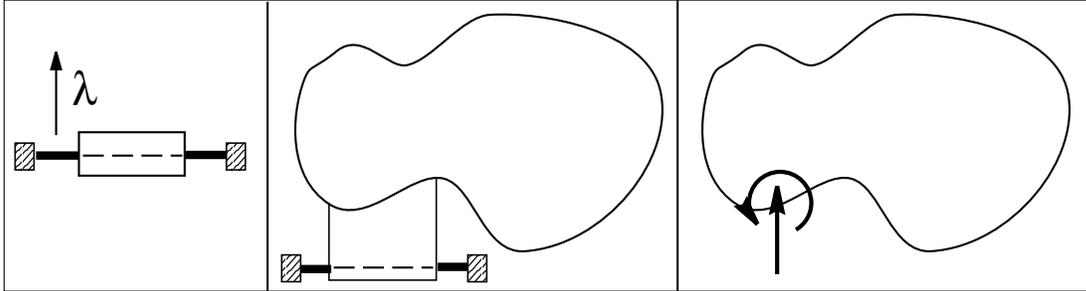


Figura 2.10: Coppia prismatica.

2.3 Equilibrio corpo rigido

Si considera adesso un corpo rigido soggetto ad un sistema di forze (attive e reattive) S_f composto da (P_i, \mathbf{F}_i) con $i = 1..n$. Il corpo è in equilibrio quando tale sistema è equilibrato, come definito nel capitolo precedente, ossia quando la somma di tutte le forze che agiscono su di esso (*risultante*) e la somma dei momenti di queste azioni rispetto ad un polo Ω (*momento risultante*) sono nulli, ossia

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{M}_\Omega = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{\Omega P_i} \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

Queste relazioni prendono il nome rispettivamente di prima e seconda *equazione cardinale della statica*.

Queste relazioni sono valide sia nel piano che nello spazio, mentre si specializzano in modo diverso le relative equazioni scalari corrispondenti, come mostrato nel seguito,

Per maggior chiarezza vengono trattati distintamente i due casi di equilibrio nel piano ed equilibrio nello spazio.

diagramma corpo libero

sottosistemi isostatici

perno carico