Capitolo 3

Cinematica

La cinematica studia il moto di punti e corpi a prescindere dalle cause che lo determinano. La relazione tra moto e azioni sarà oggetto della dinamica. In questo capitolo si descrivono velocità ed accelerazioni prima di un punto materiale e poi di un corpo rigido e di sistemi di corpi rigidi.

3.1 Cinematica del punto materiale

Per determinare la velocità e l'accelerazione di un punto P, si deve innanzitutto esprimere il vettore posizione del punto $\overrightarrow{OP(t)}$ rispett o ad un altro punto O fisso; per definizione la velocià di P è il vettore $\boldsymbol{v}_P$

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP(t)}}{\mathrm{d}t} = \dot{\overrightarrow{OP(t)}} \tag{3.1}$$

mentre l'accelerazione è

$$\boldsymbol{a}_P = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP(t)}}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\boldsymbol{v}}_P = \ddot{\overrightarrow{OP(t)}} \tag{3.2}$$

Nelle precedenti relazioni si è fatto uso dell'analisi di funzioni vettoriali, per effettuare la derivata del vettore $\overrightarrow{OP}(t)$. Come per le funzioni scalari la derivata è il limite di un rapporto incrementale e molte proprietà delle funzioni scalari possono essere applicate al caso di finzioni vettoriali (derivata della somma, differenza, prodotto, funzioni composte etc.).
Come già fatto nell'algebra vettoriale, per effettuare i calcoli si esprimono le relazioni vettoriali attraverso equazioni scalari, sfruttando le componenti. In questo caso è conveniente scrivere il vettore posizione del punto in un sistema di riferimento cartesiano fisso, secondo la relazione

$$\overrightarrow{OP(t)} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

cosi che le 3.1 e 3.2 diventano rispettivamente

$$\boldsymbol{v}_P = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + \dot{y}\,\boldsymbol{j} + \dot{z}\,\boldsymbol{k} \tag{3.4}$$

e

$$\boldsymbol{a}_P = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix} = \ddot{x}\,\boldsymbol{i} + \ddot{y}\,\boldsymbol{j} + \ddot{z}\,\boldsymbol{k} \tag{3.5}$$

3.1.1 Moto lungo una traiettoria

Nel caso in cui sia nota la traiettoria del punto, possono risultare utili altre espressioni per la determinazione di velocità ed accelerazioni del punto.

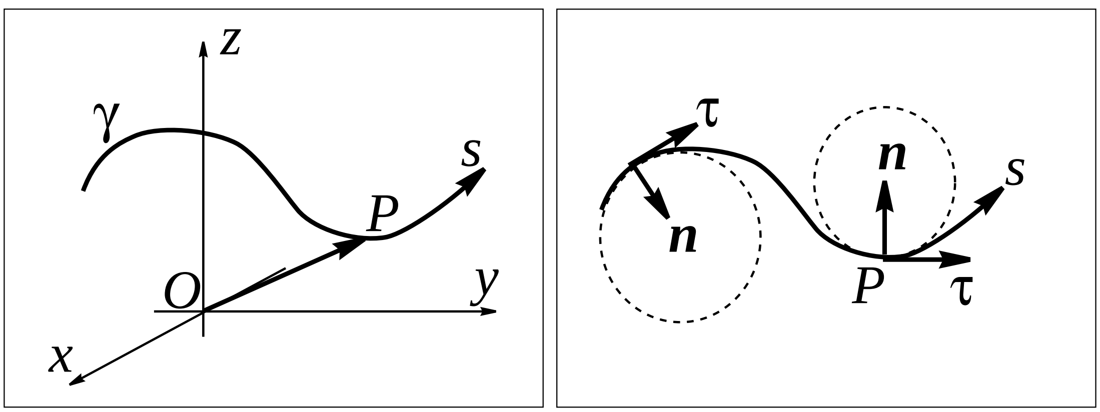

Figura 3.1: Moto di un punto lungo una traiettoria.

Sia γ una curva regolare nello spazio, corrispondente alla traiettoria del punto P. Su tale curva si fissa un verso di percorrenza ed un'ascissa curvilinea s che rappresenta la posizione del punto rispetto alla curva. Il vettore posizione del punto risulta pertanto definito in funzione dell'ascissa curvilinea come

$$\overrightarrow{OP(s)} = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Sono utili anche per la cinematica alcune proprietà differenziali delle curve, legate alle derivate di $\overrightarrow{OP(s)}$. Si può dimostrare che

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}(s)}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\tau} \tag{3.7}$$

ossia la derivata prima del vettore posizione rispetto all'ascissa curvilinea fornisce il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$ alla curva con verso concorde ad s. Ricorda che $|\boldsymbol{\tau}| = 1$. La derivata seconda di $\overrightarrow{OP(s)}$ coinvolge un'altra caratteristica importante della curva γ, la curvatura c o al raggio di curvatura ρ

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP}(s)}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = c\,\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\rho} \tag{3.8}$$

Il raggio di curvatura può essere interpretato come il raggio della circonferenza che approssima localmente, nell'intorno di P la curva γ; con $\boldsymbol{n}$ si è invece indicato il versore normale alla curva diretto verso il centro di curvatura, ossia il centro della circonferenza approssimante.

Il moto del punto lungo la curva, come potrebbe accadere per quello di un'automobile lungo un tragitto, si esprime attraverso una legge del tipo $s(t)$, ossia con la funzione che lega l'ascissa curvilinea al tempo. Per l'equazione 3.1 e per le regole di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}(s(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}(s)}{\mathrm{d}s}\dot{s} = \dot{s}\,\boldsymbol{\tau} \tag{3.9}$$

che indica che la velocità è sempre tangente alla traiettoria. Per le accelerazioni, in base alla precedente e alla 3.2, considerando che anche $\boldsymbol{\tau}$ cambia nel tempo e applicando le regole di derivazione del prodotto di funzioni, si ottiene

$$\boldsymbol{a}_P = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{s}\,\boldsymbol{\tau}\right)}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\,\dot{s}\right) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{3.10}$$

La relazione 3.10 evidenzia che l'accelerazione di un punto è data da una componente diretta come $\boldsymbol{n}$, pertanto denominata *centripeta* e da una parallela a $\boldsymbol{\tau}$, che rappresenta la componente *tangenziale*. Si osserva inoltre che l'accelerazione del punto può essere diversa da zero anche se questo si muove lungo la curva con velocità $\dot{s}$ costante; infatti la curvatura fa si che il vettore velocità cambi in direzione, grazie alla componente normale dell'accelerazione.

Moto lungo una traiettoria circolare

Un caso di particolare interesse come applicazione del paragrafo precedente è il moto di un punto lungo una traiettoria circolare. In questo caso è conveniente esprimere l'ascissa curvilinea s, rappresentante la lunghezza dell'arco, in funzione dell'angolo al centro θ, ossia $s = r\,\theta$, come mostrato in Fig. 3.2.

Ne segue facilmente dalle 3.9 e 3.10 che velocità ed accelerazione sono date da

$$\boldsymbol{v}_P = r\dot{\theta}\,\boldsymbol{\tau} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{a}_P = r\ddot{\theta}\,\boldsymbol{\tau} + r\dot{\theta}^2\boldsymbol{n} \tag{3.12}$$

3.2 Cinematica del corpo rigido

Le relazioni cinematiche per un corpo rigido possono essere ottenute da quelle del punto materiale, tenendo conto che i punti che costituiscono il corpo si muovono compatibilmente con il vincolo di rigidà. Ossia, ad ogni istante durante il movimento

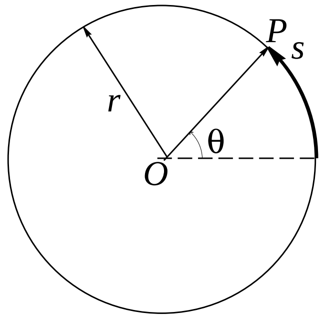

Figura 3.2: Moto di un punto lungo una traiettoria circolare.

a) deve rimanere costante la distanza tra due punti qualsiasi del corpo rigido
b) deve rimanere costante l'angolo formato tra due segmenti qualsiasi solidali al corpo rigido.

3.2.1 Moto rotatorio attorno ad un asse fisso

Si consideri adesso un corpo rigido vincolato al telaio con una coppia rotoidale in un punto A. Il corpo si muove di moto rotatorio ed ogni suo punto, dovendo per l'ipotesi di rigidità avere distanza costante da A, descrive una traiettoria circolare di centro A e raggio pari alla distanza dal punto A stesso, come mostrato in Fig.3.3. Possono quindi essere usate per ogni punto le formule 3.11

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_P &= r_P\dot{\theta}\,\boldsymbol{\tau}_P & \qquad \boldsymbol{v}_Q &= r_Q\dot{\phi}\,\boldsymbol{\tau}_Q \\ \boldsymbol{a}_P &= r_P\ddot{\theta}\,\boldsymbol{\tau}_P + r_P\dot{\theta}^2\boldsymbol{n}_P & \qquad \boldsymbol{a}_Q &= r_Q\ddot{\phi}\,\boldsymbol{\tau}_Q + r_Q\dot{\phi}^2\boldsymbol{n}_Q \end{aligned}$$

Poiché, sempre per l'ipotesi di rigidità, l'angolo tra AP e AQ –pari a $\gamma = \theta - \phi$– rimane

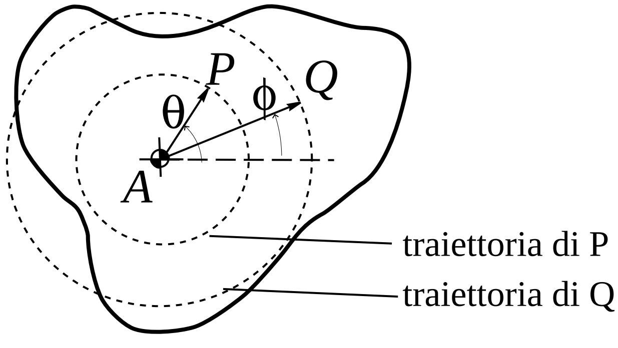

Figura 3.3: Moto rotatorio attorno ad un asse fisso per A.

costante durante il moto, si ha che

$$\dot{\theta} = \dot{\phi}$$
$$\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$$

Questo permette di definire due vettori, denominati rispettivamente *velocità angolare* e *accelerazione angolare*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\, \boldsymbol{k} \tag{3.13}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\theta}\, \boldsymbol{k} \tag{3.14}$$

che in questo caso sono entrambi paralleli all'asse di rotazione $\boldsymbol{k}$; in un moto qualsiasi i due vettori non sono tra loro paralleli ma rimane comunque vero che essi sono grandezze rappresentative della rotazione del corpo rigido. È importante quindi sottolineare che si parla di velocità ed accelerazione angolare di un corpo rigido e non di un punto del corpo rigido.
Avendo introdotto questi vettori, si possono scrivere velocità ed accelerazione dei punti di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso di direzione $\boldsymbol{k}$, come

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \tag{3.15}$$
$$\boldsymbol{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} - \boldsymbol{\omega}^2 \overrightarrow{AP} \tag{3.16}$$

Moto rotatorio attorno ad un punto fisso

Si analizza il caso di rotazione attorno ad un punto, ossia si sostituisce la coppia rotoidale in A con una coppia sferica. Si osserva innanzitutto che, mentre nel caso di coppia rotoidale la traiettoria di un punto qualsiasi giace su un piano ortogonale all'asse di rotazione, nel caso di coppia sferica la traiettoria è una curva nello spazio appartenente ad una sfera di centro A. Sottolineando che in questo caso le direzioni di $\boldsymbol{\omega}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ possono essere qualsiasi, le relazioni precedenti divengono

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \tag{3.17}$$
$$\boldsymbol{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} - \boldsymbol{\omega}^2 \overrightarrow{AP^*} \tag{3.18}$$

dove P^* è il punto proiezione di P sulla retta per A parallela ad $\boldsymbol{\omega}$.

3.2.2 Moto traslatorio

Un corpo rigido si muove di moto traslatorio quando la sua velocità angolare rimane nulla nel tempo e quindi è nulla anche la sua accelerazione angolare. Può essere utile osservare che il moto traslatorio può essere sia rettilineo che curvilineo, come mostrato in Fig.3.4.

In entrambi i casi tutti i punti descrivono traiettorie omologhe per cui il vettore spostamento di un punto tra la posizione ad un istante t e quella ad un istante t' è lo stesso per tutti i punti

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'} = \boldsymbol{d}$$

Ne consegue inoltre che *tutti i punti di un corpo rigido che si muove di moto traslatorio hanno ugual velocità e accelerazione*

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_P \qquad \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_P \tag{3.19}$$

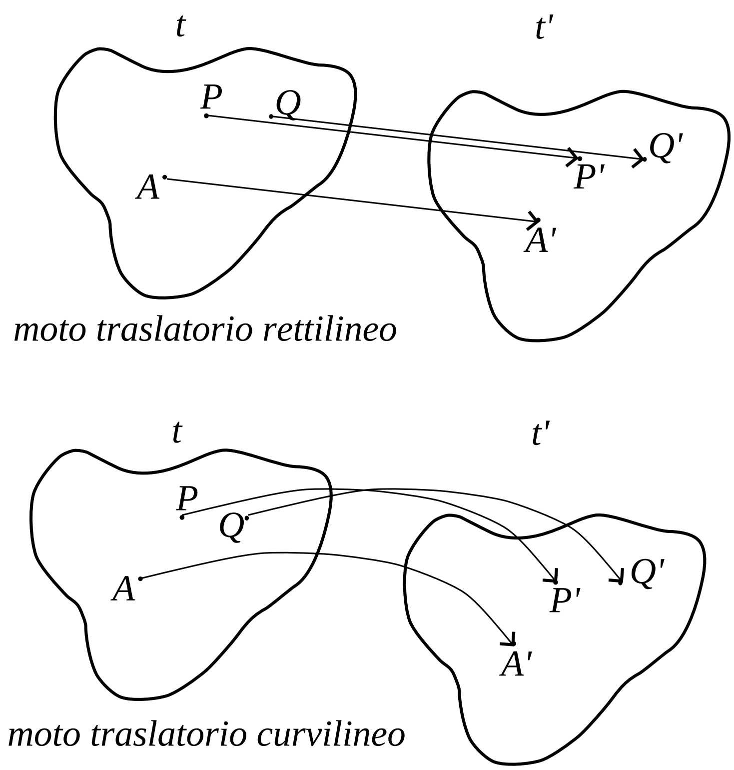

Figura 3.4: Moto traslatorio rettilineo o curvilineo.

3.2.3 Moto rototraslatorio

Il moto più generale di corpo rigido è dato dalla combinazione di traslazione e rotazione e si definisce pertanto rototraslatorio. Come sarà chiarito nello studio dei moti composti, dato un punto fisso O e due punti A e B si ha che

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

che per derivazione fornisce

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA} \\ \boldsymbol{a}_B &= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_{BA}$ e $\boldsymbol{a}_{BA}$ rappresentano la velocità e l'accelerazione di B rispetto ad A. Quando A e B appartengono allo stesso corpo rigido, possono essere applicati per $\boldsymbol{v}_{BA}$ e $\boldsymbol{a}_{BA}$ le relazioni 3.15 per moto piano o 3.17 per moto nello spazio. Si ottengono così le relazioni che legano velocità ed accelerazioni di punti di un corpo rigido ossia la formula *fondamentale della cinematica rigida* valida sia nel piano che nello spazio

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{3.20}$$

il *teorema di Rivals* per accelerazioni nel caso di moto piano

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB} \tag{3.21}$$

che per moti nello spazio diviene

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB^*} \tag{3.22}$$

.

3.2.4 Centro delle velocità

Dal confronto tra la 1.22 e la formula fondamentale, ossia

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \boldsymbol{M}_B &= \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{R} \wedge \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

il campo di velocità di un corpo rigido può essere studiato in modo analogo a quanto fatto per i sistemi equivalenti.
In particolare, per un modo piano non traslatorio (l'ipotesi $\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0}$ diviene $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$), si può individuare un punto C_V avente velocità nulla. Questo punto prende il nome di *centro delle velocità* del corpo rigido, rispetto al quale la formula fondamentale diviene

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{C_V B} \tag{3.23}$$

che esprime il fatto che il moto del corpo è equivalente ad una rotazione attorno al centro delle velocità. L'individuazione del punto C_V, che cambia nel tempo, si ottiene conoscendo la direzione delle velocità di due suoi punti; infatti, in base al teorema di Chasles, il centro delle velocità giace sull'ortogonale alle velocità nei punti.
Nel caso di moto della spazio, come per i sistemi di vettori, esiste un punto Ω avente velocità parallela alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, ossia, analogamente alla (1.26),

$$\boldsymbol{v}_\Omega \wedge \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0} \tag{3.24}$$

L'asse per Ω parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ prende il nome di asse elicoidale del moto o asse di Mozzi, proprio perché i punti del corpo hanno velocità come una vite con quest'asse. La determinazione dell'asse elicoidale del moto segue la stessa procedura descritta per l'asse centrale.

3.3 Moti relativi

Le espressioni precedenti permettono di determinare velocità ed accelerazione di un punto o di un corpo, che vengono definite assolute in quanto valutate rispetto ad un punto O fisso o ad un osservatore fisso. Talvolta però risulta più semplice descrivere la cinematica attraverso un punto o un osservatore mobile; ad esempio, se si considera una pallina che può scorrere in una guida ricavata in un disco -Fig. 3.5 , un osservatore solidale al disco vede la pallina muoversi nella guida secondo una traiettoria semplice, mentre per un osservatore fisso la traiettoria della pallina è di difficile determinazione.

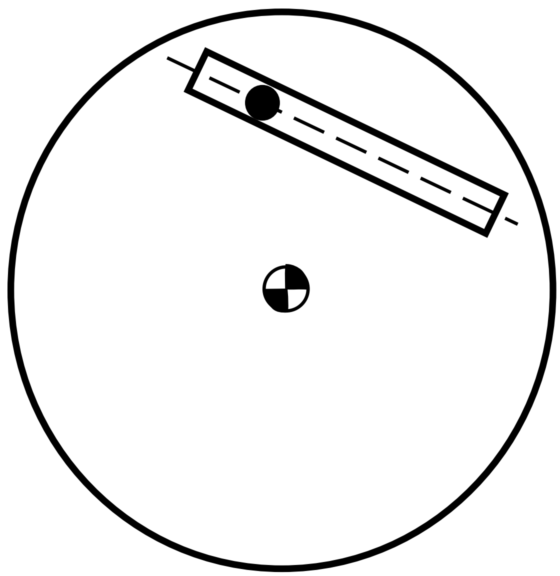

Figura 3.5: Moto rotatorio attorno ad un asse fisso per A.

Occorre pertanto acquisire strumenti per poter trattare opportunamente anche questi problemi, ossia casi in cui ci sia la composizione di un movimento (come quello della pallina e quello del disco nell'esempio precedente).
Si fa innanzitutto riferimento a due situazioni diverse:
-*moto rispetto ad un punto*, a cui si è già accennato e nel quale si considera il moto relativo fra due punti;
-*moto rispetto ad un osservatore ausiliario* o moto rispetto ad un corpo rigido, come quello della pallina rispetto al disco.

3.3.1 Moto rispetto ad un punto

Come anticipato, si considerano due punti A e B indipendenti o appartenenti allo stesso corpo rigido; si hanno le seguenti relazioni rispettivamente per la velocità e per l'accelerazione dei punti

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} & (3.25)\\ \boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA} & (3.26)\\ \boldsymbol{a}_B &= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} & (3.27)\\ & & (3.28)\end{aligned}$$

3.3.2 Composizione delle velocità

Si consideri adesso un osservatore ausiliario, mobile, per il quale sono facilmente determinabili velocità $\boldsymbol{v}_P^{(rel)}$ ed accelerazione $\boldsymbol{a}_P^{(rel)}$ relative di un punto o di un corpo. Noto il moto dell'osservatore è possibile risalire alla velocità assoluta del punto attraverso il **teorema di composizione delle velocità** che afferma che

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_P^{(tr)} + \boldsymbol{v}_P^{(rel)} \tag{3.29}$$

ossia la velocità assoluta di un punto è data dalla somma vettoriale della velocità relativa e della velocità di trascinamento $\boldsymbol{v}_P^{(tr)}$, ossia la velocità che avrebbe P se fosse solidale all'osservatore ausiliario e quindi fermo rispetto ad esso.

3.3.3 Composizione delle accelerazioni

Analogamente al precedente si ha anche il **teorema di composizione delle accelerazioni** in base al quale

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_P^{(tr)} + \boldsymbol{a}_P^{(rel)} + \boldsymbol{a}_P^{(Cor)} \tag{3.30}$$

dove con $\boldsymbol{a}_P^{(tr)}$ si intende l'accelerazione di trascinamento del punto e con $\boldsymbol{a}_P^{(Cor)}$ l'accelerazione di Coriolis definita come

$$\boldsymbol{a}_P^{(Cor)} = 2\boldsymbol{\omega}^{(tr)} \wedge \boldsymbol{v}_P^{(rel)} \tag{3.31}$$

Dalla equazione precedente si ha che l'accelerazione di Coriolis è nulla se l'osservatore ausiliario non ruota ossia se si muove di moto traslatorio.

3.3.4 Composizione delle velocità angolari

Una ulteriore importante relazione si ottiene anche per le velocità angolari nei moti relativi

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(tr)} + \boldsymbol{\omega}^{(rel)} \tag{3.32}$$

e quindi la velocità angolare assoluta di un corpo è data dalla somma vettoriale della velocità angolare relativa e della velocità angolare di trascinamento $\boldsymbol{\omega}^{(tr)}$, ossia la velocità angolare dell'osservatore ausiliario.

Si sottolinea che tutte queste relazioni sono applicabili sia a moti nel piano che a moti nello spazio. Possono essere ottenute prendendo un sistema di riferimento fisso $S(O,x,y,z)$ ed uno mobile $S'(O',x',y',z')$ ed esprimendo il vettore posizione del punto P come

$$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'P}(t)$$

e quindi in componenti

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP}(t) &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \\
\overrightarrow{OO'}(t) &= x_{O'}(t)\boldsymbol{i} + y_{O'}(t)\boldsymbol{j} + z_{O'}(t)\boldsymbol{k} \\
\overrightarrow{O'P}(t) &= x'(t)\boldsymbol{i}'(t) + y'(t)\boldsymbol{j}'(t) + z'(t)\boldsymbol{k}'(t)
\end{aligned}$$

quindi

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x_{O'}\boldsymbol{i} + y_{O'}\boldsymbol{j} + z_{O'}\boldsymbol{k} + x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

Per derivazione si ottengono le velocità

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_P &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v}_P &= \dot{x_{O'}}\boldsymbol{i} + \dot{y_{O'}}\boldsymbol{j} + \dot{z_{O'}}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\omega} \wedge (x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}') + \dot{x'}\boldsymbol{i}' + \dot{y'}\boldsymbol{j}' + \dot{z'}\boldsymbol{k}'
\end{aligned}$$

in cui si riconoscono

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_P^{(tr)} &= \dot{x_{O'}}\boldsymbol{i} + \dot{y_{O'}}\boldsymbol{j} + \dot{z_{O'}}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\omega} \wedge (x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}') \\
\boldsymbol{v}_P^{(rel)} &= \dot{x'}\boldsymbol{i}' + \dot{y'}\boldsymbol{j}' + \dot{z'}\boldsymbol{k}'
\end{aligned}$$

Nelle precedenti relazioni si è fatto uso delle formule di Poisson per ricavare le derivate dei versori del riferimento mobile. In generale si ha che il vettore derivata di un versore -o di un vettore con modulo costante- è ortogonale al versore stesso; in particolare, se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare dell'osservatore ausiliario e quindi anche del sistema di riferimento S' ad esso solidale, le formule di Poisson mostrano che

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{i}' \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{j}' \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{k}' \tag{3.33}$$

3.4 Gradi di libertà

Ci si pone adesso il problema di determinare la posizione di un punt o di un corpo nel piano e nello spazio. Chiaramente per definire la posizione di un punto basta conoscere le sue coordinate, due o tre rispettivamente nel piano o nello spazio. Il numero minimo di parametri necessari e sufficienti a definire la posizione di un punto/corpo prende il nome di *gradi di libertà*. Quanti sono i gradi di libertà di un corpo rigido nel piano? Per rispondere basta considerare che la posizione del corpo è nota quando lo è quella di due suoi punti A e B. Poiché la distanza tra A e B è costante e nota, sarà sufficiente conoscere la posizione di A e l'inclinazione del segmento AB rispetto ad una direzione di riferimento, quindi *i gradi di libertà di un corpo rigido nel piano sono 3.* Analogamente

nello spazio con tre coordinate siamo in grado di individuare il punto A e con altri tre parametri l'orientazione nello spazio del segmento AB, quindi *i gradi di libertà di un corpo rigido nello spazio sono sei.*
Queste considerazioni ipotizzano che il corpo sia libero, sia cioè senza vincoli che possono limitare i movimenti riducendone i gradi di libertà.

3.5 Analisi dei vincoli

Così come in statica i vincoli giocano in cinematica un ruolo fondamentale nella determinazione del moto di un corpo o di un punto ed in questo paragrafo si analizzano in dettaglio i vari tipi di vincolo limitandoci al caso piano.

3.5.1 Appoggio semplice o carrello

Appoggio semplice o carrello su telaio

Si consideri innanzitutto un corpo rigido vincolato al telaio con un carrello nel punto A. In questo caso l'ordinata del punto A non può variare per cui sarà sufficiente conoscerne l'ascissa per individuare la sua posizione, che con l'angolo θ costituiscono i due gradi di libertà del corpo. Si ha quindi che un vincolo carrello toglie un grado di libertà al corpo o alternativamente, fornisce una condizione di vincolo

$$y_A = cost$$

che implica inoltre:
- per le velocità $\boldsymbol{v}_A = v\,\boldsymbol{i}$
- per le accelerazioni $\boldsymbol{a}_A = a\,\boldsymbol{i}$

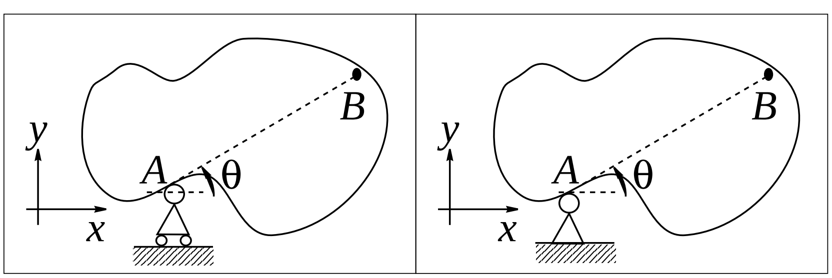

Figura 3.6: Corpo rigido vincolato con carrello al telaio in A.

3.5.2 Coppia rotoidale

Coppia rotoidale con telaio

Nel caso in cui il corpo rigido sia vincolato al telaio con una coppia rotoidale in A, che ne mantiene bloccate ascissa ed ordinata

$$x_A = cost \qquad y_A = cost$$

. Il corpo ha perciò un solo grado di libertà corrispondente all'angolo θ. Quindi una coppia rotoidale toglie due gradi di libertà al corpo con due condizioni di vincolo, dalle quali si ha
- per le velocità $\boldsymbol{v}_A = \mathbf{0}$
- per le accelerazioni $\boldsymbol{a}_A = \mathbf{0}$

Coppia rotoidale mobile

Come vincolo mobile la coppia rotoidale fa si che due punti di due corpi rimangano uniti durante il movimento lasciando però liberi due corpi di ruotare. Le condizioni che fornisce questo vincolo sono dunque due, cioè

$$x_B^{(1)} = x_B^{(2)} \qquad y_B^{(1)} = y_B^{(2)}$$

dalle quali si ottengono
- per le velocità $\boldsymbol{v}_A^{(1)} = \boldsymbol{v}_A^{(2)}$
- per le accelerazioni $\boldsymbol{a}_A^{(1)} = \boldsymbol{a}_A^{(2)}$

Considerando il moto relativo di $A^{(2)}$ rispetto al corpo (1)
- velocità $\boldsymbol{v}_A^{(rel)} = \mathbf{0}$
- accelerazione $\boldsymbol{a}_A^{(rel)} = \mathbf{0}$

che significa che il moto relativo del corpo (2) rispetto al corpo (1) è rotatorio attorno al punto A.

3.5.3 Coppia prismatica

Coppia prismatica con telaio

Un corpo vincolato con coppia prismatica al telaio, può semplicemente traslare nella direzione della coppia prismatica lasciando al corpo un solo grado di libertà. Le condizioni fornite dal vincolo sono due, cioè

$$y_a = cost \qquad \theta = cost$$

da cui
- il moto è traslatorio, per cui $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$
- per le velocità $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{i}$

- per le accelerazioni $\boldsymbol{a} = a\,\boldsymbol{i}$

Coppia prismatica mobile

Quando la coppia prismatica collega due corpi come vincolo interno le relazioni precedenti continuano ad essere valide in un moto relativo; le condizioni del vincolo sono ancora due

$$y'_a = cost \qquad \theta' = cost$$

da cui
- il moto relativo è traslatorio, per cui $\boldsymbol{\omega}^{(rel)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(rel)} = \mathbf{0}$
- per le velocità $\boldsymbol{v}^{(rel)} = v\,\boldsymbol{i}'$
- per le accelerazioni $\boldsymbol{a}^{(rel)} = a\,\boldsymbol{i}'$