Integrazioni di alcuni argomenti che nel testo di riferimento fossero assenti oppure trattati con un diverso formalismo.

Argomento 1.1 Errori di misura e loro propagazione

Grandezza fisica $\Leftrightarrow$ entita' misurabile $\Leftrightarrow$ esiste uno strumento di misura $\Rightarrow$ c'è un **errore associato ad ogni tipo di misura**

Nota: "errore" non significa "sbaglio", ma "incertezza"

Esempio:

Altezza = 170±1 cm =

= H ± δH = 170±1 cm

Propagazione degli errori: se misuro x con errore δx, l'errore δF sulla grandezza F(x) e' dato da: $\delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \delta x$ .....

... questo perche' $F \pm \delta F \cong F \pm \frac{\partial F}{\partial x} \delta x$.

Esempio: Se misuro il lato *(x)* di un quadrato con un errore δx . Gli errori sull'area *(A)* e sul perimetro *(P)* sono:

$$A \pm \delta A = (x \pm \delta x)^2 \approx x^2 \pm 2x\delta x \quad \Rightarrow \delta A = 2x\delta x$$

$$P \pm \delta P = 4(x \pm \delta x) = 4x \pm 4\delta x \quad \Rightarrow \delta P = 4\delta x$$

Si noti che $\frac{\delta A}{A} = 2\frac{\delta x}{x}$ ma $\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta x}{x}$

Esercizio: Misurate lo spigolo di un dado cubico e stimatene l'errore. Quale è l'errore che avete sul volume del cubo? $\left[\delta V = 3L^2(\delta L) \Rightarrow \frac{\delta V}{V} = 3\frac{\delta L}{L}\right]$

Argomento 1.2 Rappresentazione del vettore posizione $\vec{R}$ e di un vettore generico $\vec{A}$ **in coordinate polari**

In cordinate cartesiane sia $\vec{R} = (x, \quad y, \quad z)$ la posizione e sia $\vec{A} = (A_x, \quad A_y, \quad A_z)$ un vettore generico.

Rappresentazione di $\vec{R}$ e di $\vec{A}$ in coordinate **polari cilindriche:**

$\vec{R} = (r, \quad \phi, \quad z)$ $\qquad \vec{A} = (A_r, \quad A_\phi, \quad A_z)$ ← *Componente assiale*

Componente tangenziale

con $r \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad z$ qualunque. *Componente radiale*

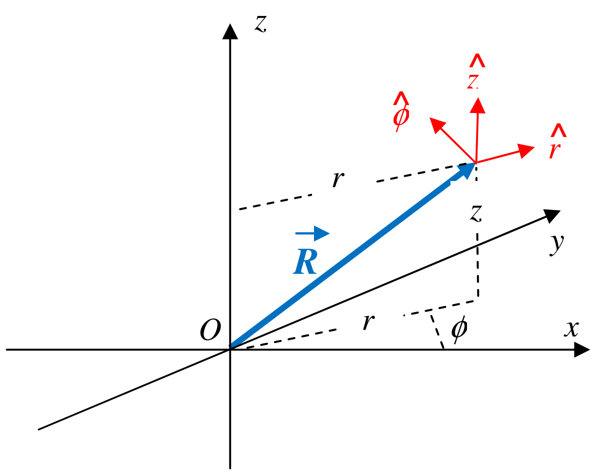
Le relazioni fra le coordinate cilindriche e cartesiane sono le seguenti:

$z = z$ (è la stessa coordinata)

$x = r \cos\phi$

$y = r \sin\phi$ (r e ϕ sono le coordinate polari nel piano x-y)

Queste relazioni si possono facilmente invertire.



Rappresentazione di $\vec{R}$ e di $\vec{A}$ in coordinate **polari sferiche:**

$\vec{R} = (R, \quad \theta, \quad \phi)$ $\qquad\qquad$ $\vec{A} = (A_R, \quad A_\theta, \quad A_\phi)$

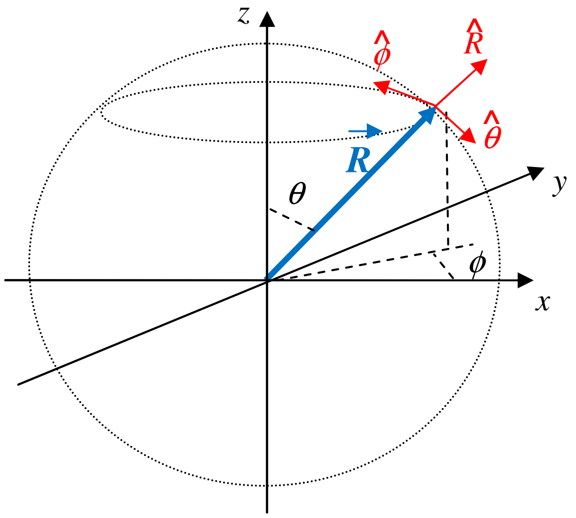
con $\quad R \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$

Le relazioni, facilmente invertibili, fra le coordinate sferiche e cartesiane sono :

$z = R\cos\theta$

$x = R\sin\theta\cos\phi$

$y = R\sin\theta\sin\phi$



Attenzione: gli angoli delle coordinate polari terrestri (latitudine e longitudine) hanno limiti diversi rispetto agli angoli θ e ϕ:

Latitudine = *[-180°, +180°]*
Longitudine = *[-90°, +90°]*

Esempio: inversione delle relazioni fra coordinate polari e cartesiane cilindriche.

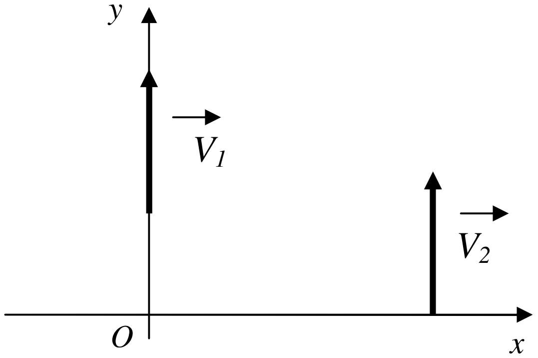
$z = z$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\phi = y / x$

Attenzione: le componenti di un vettore in **coordinate polari** <u>dipendono</u> dal punto di applicazione.

Esempio nel piano



I vettori $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, che hanno modulo uguale e pari ad *1m/s*, sono uguali e differiscono solo per il punto di applicazione.

In coordinate cartesiane $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = (V_x, \quad V_y, \quad V_z) = (0, \quad 1m/s, \quad 0)$.

In coordinate polari (nel piano): $\vec{V}_1 = (V_{1r}, \quad V_{1\phi}, \quad V_{1z}) = (1m/s, \quad 0, \quad 0)$, mentre $\vec{V}_2 = (V_{2r}, \quad V_{2\phi}, \quad V_{2z}) = (0, \quad 1m/s, \quad 0)$.

Argomento 1.3 **Calcolo** del vettore posizione $\vec{R}$ se è nota la velocità $\vec{V}$

Se la velocità è nota per $t > t_o$: $V_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = V_x dt \Rightarrow$

$$x(t) - x(t_o) = \int_{x_o}^{x} dx = \int_{t_o}^{t} V_x dt \Rightarrow$$

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} V_x dt$$ con $x(t_o) \equiv x_o$ condizione iniziale.

Analogamente: $y(t) = y_o + \int_{t_o}^{t} V_y dt$ e $z(t) = z_o + \int_{t_o}^{t} V_z dt$

per cui il risultato in notazione compatta è:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_o + \int_{t_o}^{t} \vec{V} dt$$ (si noti che si ha proprio $\vec{R}(t) - \vec{R}_o = \int_{\vec{R}_o}^{\vec{R}} d\vec{R}$)

Argomento 1.4 <u>**Calcolo** della velocità $\vec{V}$ se è nota l'accelerazione</u> $\vec{a}$

Se l'accelerazione è nota per $t > t_o$: $a_x = \dfrac{dV_x}{dt} \Rightarrow dV_x = a_x dt \Rightarrow$

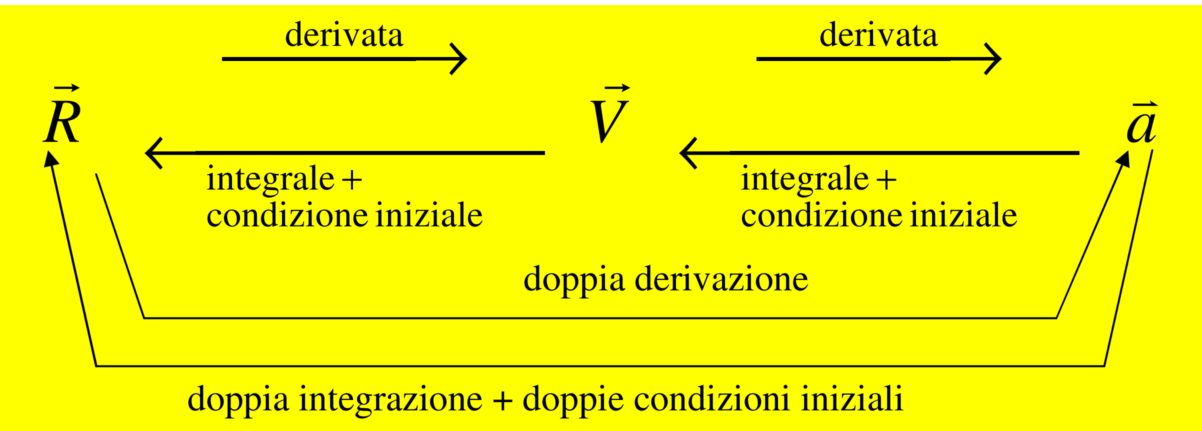
$$V_x(t) - V_x(t_o) = \int_{V_{xo}}^{V_x} dV_x = \int_{t_o}^{t} a_x dt \quad \Rightarrow$$

$$V_x(t) = V_{xo} + \int_{t_o}^{t} a_x dt$$ con $V_x(t_o) \equiv V_{xo}$ <u>condizione iniziale</u>.

Analogamente: $V_y(t) = V_{yo} + \int_{t_o}^{t} a_y dt$ e $V_z(t) = V_{zo} + \int_{t_o}^{t} a_z dt$

per cui il risultato in notazione compatta è: $$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a} dt$$

Riepilogo per le trasformazioni: posizione ⟵⟶ velocità ⟵⟶ accelerazione



Argomento 1.5 Calcolo della velocità accelerazione in un moto circolare uniforme tramite metodo analitico.

Se la traiettoria è nel piano *xy*,con il centro nel punto *O*, si può scrivere la legge oraria del moto circolare uniforme come

$$\vec{R} = \left(A\cos(\omega t + \phi),\quad A\sin(\omega t + \phi),\quad 0\right)$$

dove

- $A \quad \Rightarrow$ Raggio
- $\omega \quad \Rightarrow$ velocita' angolare
- $\phi \quad \Rightarrow$ fase

Allora:

$$\vec{V} = \left(-\omega A\sin(\omega t + \phi),\quad \omega A\cos(\omega t + \phi),\quad 0\right)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{V}\right| = \omega\left|\vec{R}\right|$$

$\Rightarrow \vec{V} \bullet \vec{R} = 0 \Rightarrow$ perpendicolare alla posizione (tangente alla traiettoria)

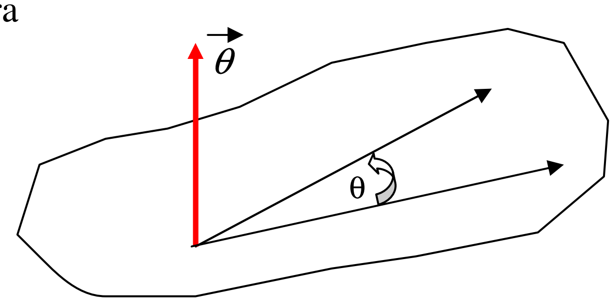
$$\vec{a} = \left(-\omega^2 A\cos(\omega t + \phi),\quad \omega^2 A\sin(\omega t + \phi),\quad 0\right)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \omega^2\left|\vec{R}\right|$$

$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2\vec{R} \Rightarrow$ **l'accelerazione è centripeta** con modulo $\left|\vec{a}\right| = \dfrac{V^2}{\left|\vec{R}\right|}$

Argomento 1.6 Moti rotatori (complementi)

Definizione: **angolo come vettore** $(\vec{\theta})$ $\Rightarrow$ modulo pari al modulo dell'angolo, direzione perpendicolare al piano che contiene l'angolo, verso secondo la regola della mano destra



Nota: se il simbolo di vettore è omesso, intenderemo la proiezione del vettore angolo su un asse perpendicolare al piano che lo contiene. L'angolo puo' essere, infatti, positivo o negativo.

Definizione: **moti rotatori** $\Rightarrow$ l'angolo varia nel tempo: $\vec{\theta}(t)$ (oppure $\theta(t)$)

ed anche $|\vec{R}| = R = R(t)$

Definizione: **moti circolari** $\Rightarrow$ se la traiettoria e' una circonferenza. Tutti i moti circolari sono rotatori, ma non viceversa. In un moto circolare $|\vec{R}| = R =$ costante

Definizione: **velocita' angolare** $\Rightarrow$ $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\theta}}{dt}$

- La velocità angolare è un vettore costante nel moto circolare uniforme, ma non lo è nei moti in generale!
- $[\vec{\omega}] = rad / s$
- $\theta(t) = \theta_o + \int_{t_o}^{t} \omega dt$ per ricavare l'angolo se e' nota la velocita' angolare
- Per un moto circolare anche non uniforme $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$ => la velocità è tangenziale alla traiettoria, come accade del resto per tutti i moti

- In generale: $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} + \hat{R}\dfrac{d|\vec{R}|}{dt}$. Infatti, in un moto piano generico in cui definiamo $R = |\vec{R}|$, si ha $\vec{R} = (x, \quad y, \quad 0) = (R\cos\vartheta, \quad R\sin\vartheta, \quad 0)$, $\hat{R} = (\cos\vartheta, \quad \sin\vartheta, \quad 0)$ e $\vec{\omega} = (0, \quad 0, \quad \dot{\vartheta})$. Quindi $\vec{V} = \dot{\vec{R}} = (\dot{R}\cos\vartheta - R\dot{\vartheta}\sin\vartheta, \quad \dot{R}\sin\vartheta + R\dot{\vartheta}\cos\vartheta, \quad 0)$, q.v.d.

  perche' $\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ R\cos\vartheta & R\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} + \dot{R}(\cos\vartheta, \quad \sin\vartheta, \quad 0)$.

Definizione: **acceleriazione angolare** $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

- L'accelerazione angolare è un vettore nullo nel moto circolare uniforme, (non è nullo in generale)
- $[\vec{\alpha}] = rad / s^2$
- $\omega(t) = \omega_o + \int_{t_o}^{t} \alpha dt$ per ricavare l'angolo se è nota la velocità angolare
- Per un **moto circolare** $\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) + \vec{\alpha} \wedge \vec{R} \quad = -\omega^2 \vec{R} + \vec{\alpha} \wedge \vec{R}$

  Ha una componente tangenziale $(\vec{\alpha} \wedge \vec{R})$, ed una perpendicolare $(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}))$ alla traiettoria (accelerazione centripeta).

  Dimostrazione: $\vec{a} = \dfrac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{R})}{dt} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R})$
- Nota: In generale si avrebbe $\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) + \vec{\alpha} \wedge \vec{R} + \ddot{R}\hat{R} + 2\dot{R}\vec{\omega} \wedge \hat{R}$.

  Dimostrazione:

  $$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{R})}{dt} + \frac{d(\dot{R}\hat{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt} + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\frac{d\hat{R}}{dt} =$$
  $$= \vec{\alpha} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) + \vec{\omega} \wedge (\dot{R}\hat{R}) + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}(\vec{\omega} \wedge \hat{R})$$ q.v.d.